José Antonio Fernández-Plaza
José Luis Lupiáñez
Antonio Moreno
Rafael Ramírez (coords.)

Investigación en Educación Matemática

Homenaje a los profesores *Pablo Flores e Isidoro Segovia*

universidad

Octaedro

Investigación en Educación Matemática

Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia

José Antonio Fernández-Plaza, José Luis Lupiáñez, Antonio Moreno y Rafael Ramírez (coords.)

Investigación en Educación Matemática

Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia

Octaedro

Colección Universidad
Título: *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia*

Primera edición: septiembre de 2022

ISBN (PDF): 978-84-19312-10-5
ISBN (papel): 978-84-19312-41-9

Diseño y producción: Octaedro Editorial

Publicación en Open Access - Acceso abierto

Sumario

Prólogo I

Nuria Climent Rodríguez
Universidad de Huelva

Mi primera imagen de Pablo Flores se remonta a finales de los noventa, en una reunión del grupo de Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En ese momento y en los años próximos a este, se percibía su preocupación por el conocimiento matemático en la formación inicial de maestros de Primaria. Así, en unas jornadas que celebramos en 1999 en la Universidad de Huelva sobre modelos de formación de maestros en matemáticas, explicaba el foco principal en el conocimiento matemático (tanto en el conocimiento del contenido como en el conocimiento sobre el contenido, esto es, sobre las normas de sintaxis de las matemáticas) en la formación que impartía a los futuros maestros en los primeros cursos de la entonces diplomatura. El conocimiento didáctico del contenido era para él una vía para que los futuros maestros reflexionaran sobre las características de su propio conocimiento de la disciplina y las dificultades de afrontarlo en su formación inicial.

Esta imagen inicial refleja constantes en toda la trayectoria como investigador y formador de Pablo. Por una parte, el análisis sistemático de la formación de profesores, constituyendo la línea central de su agenda de investigación. Por otra, como subagendas de esta, el conocimiento matemático de los (futuros) profesores y la reflexión como vía de desarrollo profesional. El foco en la reflexión y el conocimiento del profesor, presente en los escritos de los noventa, se mantiene en las publicaciones actuales y podemos observar que se van desarrollando paralelamente en el tiempo.

En relación con la reflexión en la formación de profesores (tanto inicial como continua), su trabajo constituye uno de los principales referentes en la investigación en Educación Matemática en España. Su investigación muestra, además, cómo la reflexión vertebra su práctica como formador en la formación inicial de profesores de Secundaria. Sus trabajos sirven de guía para una formación hacia un profesor como profesional reflexivo, que integra de forma habitual la reflexión en su práctica educativa, para tomar decisiones y afrontar situaciones problemáticas.

Su preocupación por el conocimiento matemático del profesor le lleva a la búsqueda de un modelo explicativo sobre el conocimiento que requiere el profesor de matemáticas, que pueda orientar su formación. Esto converge con las inquietudes del grupo de investigación *Seminario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (SIDM), que se lidera desde la Universidad de Huelva. Pablo forma parte del SIDM y es uno de los artífices del modelo para el análisis del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). Además, contribuye substancialmente en la profundización en el conocimiento del profesor sobre la práctica matemática, especialmente sobre la práctica de demostrar.

Pablo representa un perfil de formador de profesores que considero ideal. A su experiencia como formador de profesores e investigador en educación matemática se le une una sólida formación matemática y en la didáctica de la disciplina, así como una experiencia notoria como profesor en niveles no universitarios. Esta experiencia como profesor de Secundaria se traduce en su compromiso con la formación y divulgación, así como (adivino) en algunos de los temas en que ha centrado su investigación. Estos son tan variados como el humor en la enseñanza de la matemática, la enseñanza de la geometría y la visualización, y el aprendizaje de estudiantes con talento matemático.

En resumen, su producción como investigador es extensa y se constituye como referente obligado en la investigación sobre formación de profesores de matemáticas, la reflexión, el conocimiento del profesor y el aprendizaje de alumnado con talento matemático. Documentando mi percepción de su trayectoria con sus publicaciones, encuentro que, de sus producciones en Dialnet, el tema más presente es la formación del profesorado, seguidos de la reflexión y el conocimiento (igualados en número) y, finalmente, geometría, humor, visualización y talento matemático.

Otro de los elementos que configuran mi imagen de Pablo es su implicación en la formación de formadores de profesores. Muestra de ello es su participación en la elaboración de cuadernos de prácticas de matemáticas y su didáctica para la formación de maestros de Educación Primaria, y en monografías para la formación de profesores de matemáticas. Además, por lo que he tenido la suerte de compartir con ellos, su presencia es constante en seminarios y reuniones formativas de los formadores de maestros del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. En estas reuniones, así como en las de investigación, sus preguntas son inquisitivas, con carga de profundidad, siempre con el deseo de que los formadores de profesores reflexionen sobre su práctica y de este modo contribuir en su formación.

Su compromiso con la formación del profesorado explica, a mi parecer, su trayectoria laboral, donde la investigación responde al deseo de comprender cómo mejorarla. Por eso, además de en revistas de investigación (como Enseñanza de las Ciencias, PNA o Relime), encontramos numerosos artículos suyos en revistas dirigidas al profesorado (como Epsilon o Suma). En este sentido, la transferencia, tanto en el formato de publicaciones como en el de participación en congresos dirigidos a profesores de matemáticas, es otra de las constantes de su vida profesional.

Puede contarse, por otra parte, entre los investigadores en Educación Matemática que han asistido de manera continuada a los simposios de la SEIEM. Podemos encontrar reportes de sus investigaciones en casi todas las actas de estos simposios. Me viene a la mente acompañando a sus doctorandos, a quienes aconseja para que aprendan lo máximo posible de la experiencia. Por otro lado, su investigación refleja la evolución de buena parte de la actividad desarrollada en el grupo de Conocimiento y desarrollo profesional del profesor. Su contribución al desarrollo de la investigación en Educación Matemática en España a través de su papel en la SEIEM es evidente.

De la figura de Pablo Flores destaco su perfil de formador reflexivo, que se cuestiona sobre su práctica como formador, y que se compromete con ello en la investigación, en la transferencia de esta investigación, y en su implicación en la formación inicial y continua del profesorado y de los formadores de este profesorado. Este perfil es inspirador para todos los que nos dedicamos a la formación de profesores para la enseñanza de la matemática y es fundamental sobre todo para los formadores noveles. Sus preguntas, muchas veces difíciles, son otro ejemplo para el avance de la Educación Matemática. Muchas gracias por todo lo que nos has permitido aprender, Pablo.

Prólogo II

JAVIER VILLORIA PRIETO
Decano de la Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada

Intentando ordenar las palabras en torno a este pequeño reconocimiento a la figura del profesor y compañero Isidoro Segovia, he querido mirar hacia atrás y recordar desde cuándo lo conozco y cómo lo conocí.

Mis primeros recuerdos de él fueron como coordinador del grado de Educación Primaria. Él fue la persona en torno a la cual giró la articulación y coordinación del que entonces y hoy es el grado con más estudiantes de la Universidad de Granada, el grado de Educación Primaria. No tuve la oportunidad de tratarlo en aquellos días, pero el devenir de la vida universitaria ha hecho que posteriormente sí tuviera la fortuna de conocerlo más y mejor.

La primera vez que fui consciente de quién era fue a raíz de sus muchas intervenciones en Junta de Centro, como coordinador del grado de Primaria. Ya entonces me llamó la atención su moderación y coherencia a la hora de exponer sus puntos de vista y planteamientos, con ese tono educado y respetuoso que lo caracteriza. En cierta manera, para muchos de nosotros en esos años el profesor Segovia era «el coordinador de Educación Primaria».

Empecé a tener más trato con Isidoro cuando iniciamos la articulación de lo que es hoy el programa de doctorado de educación. En ese momento estábamos involucrados en la reestructuración de los programas que había prácticamente en todos los departamentos para generar un solo programa de doctorado y fue la implicación en ese proceso lo que me permitió que coincidiéramos en reuniones que desembocaron en el acuerdo que permitió sacar adelante el programa. Gracias a la generosidad de todos los implicados en ese proceso, e Isidoro fue uno de ellos, permitió que fuéramos el primer centro de la Universidad de Granada en unificar todos los programas que había para lograr el que hoy tenemos. Curiosamente, también tuve la oportunidad de conocerlo mejor, porque fue uno de los primeros docentes que se apuntaron a los cursos de idiomas que empezamos a organizar en la facultad para mejorar la competencia comunicativa en lengua extranjera del profesorado que nos permitiría lanzar lo que hoy es el grupo bilingüe en el grado de Educación Primaria. Recuerdo los esfuerzos que todos hacíamos para que se pudiera encontrar un número mínimo de compañeros que tuvieran el mismo nivel. Fue en esos contextos en los que empecé a descubrir otras facetas que me permitieron conocer mucho mejor quién era el profesor Segovia. Siempre le estaré agradecido, porque fue un ejemplo para muchos compañeros que vieron a través de su esfuerzo que nunca es tarde para embarcarse en nuevos desafíos, como mejorar una lengua extranjera, a pesar de las muchas tareas en las que estaba implicado.

Posteriormente, he tenido más oportunidades de conocerlo mejor, ya que asumimos al mismo tiempo nuevas labores de gestión: él, la Dirección del Departamento de Didáctica de la Matemática y, en yo, el Decanato de la facultad. Ha sido en estos años en los que hemos trabajado mucho más de cerca y compartido perspectivas sobre los temas que afectaban al centro. Siempre ha defendido con convicción el ámbito de las didácticas específicas y ha luchado por que el área de la Didáctica de la Matemática tenga el lugar que le corresponde. Él es artífice, junto con el magnífico elenco de compañeros y compañeras con los que conformó el departamento, muchos de ellos ya disfrutando del júbilo, de que el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada sea un referente a nivel nacional e internacional.

Entre las vivencias que hemos compartido hay varios hechos anecdóticos que han hecho que hayamos tenido oportunidad de conversar y conocer mejor a la persona. Son muchos los días que al subir a la facultad delante de mí he visto una figura con paso rápido y ágil subiendo la cuesta de Cardenal Parrado portando su maletín de cuero marrón, elemento característico que no deja-ba lugar a dudas sobre de quién se trataba. He de reconocer que me obligaba a apretar el paso para intentar darle alcance y compartir el último tramo antes de llegar a la Facultad; hemos tenido la suerte de que el camino a la Facultad desde nuestras casas fuera coincidente, lo que ha posibilitado que en muchas ocasiones hayamos compartido el recorrido al trabajo o de vuelta.

No puedo terminar esta pequeña introducción sin agradecerte una vida dedicada a la academia, y a la ciencia; ahora te toca disfrutar de familia y las amistades, de Granada y de Cantoria.

1

Con motivo de la jubilación de Isidoro Segovia y Pablo Flores

With the occasion of Isidoro Segovia and Pablo Flores's retirement

Luis Rico Romero
Catedrático Emérito. Académico de la Academia de Ciencias de Granada.
Universidad de Granada

Resumen
La redacción de un libro en homenaje a los compañeros del Grupo de Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico FQM-193, a raíz de su jubilación, se ha convertido en una actividad anual que, si bien es emprendida con alegría por todos los integrantes del grupo, su implementación no está exenta de dificultades. El actual curso académico 2021-2022 corresponde a los profesores Dr. P. Flores y Dr. I. Segovia finalizar su actividad académica profesional, por lo cual se ha acordado la edición de este libro. Memoria y reconocimiento a Isidoro Segovia y Pablo Flores en su jubilación.

Palabras clave: análisis didáctico, contenidos didácticos, currículo matemático, educación matemática, significados del contenido matemático escolar

Abstract
The writing of a book as a tribute to the colleagues of the Mathematics Didactics Group. Numerical Thinking FQM-193 due to their retirement, has become an annual activity that, although all members of the group cheerfully undertake it, its implementation is not without difficulty. The current academic year 2021-2022 corresponds to the professors Dr. P. Flores and Dr. I. Segovia to finish their professional academic activity, for which the edition of this recognition book has been agreed. Memory and recognition for Isidoro Segovia and Pablo Flores in their retirement.

Keywords: didactic analysis, didactic contents, mathematics curriculum, mathematics education, school mathematical content meanings

1. Preliminar

La redacción de un libro como homenaje a los compañeros del Grupo Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico FQM-193, con motivo de su jubilación, se ha convertido en una actividad anual que, si bien es asumida animosamente por todos los miembros del grupo, su realización no está exenta de dificultad. Mi contribución a este trabajo consiste en el texto que aquí presento y requiere para su interpretación disponer de componentes y referentes fundados, como los que aquí se enumeran:

- Un marco teórico estructurado, con categorías conceptuales definidas, sostenido por una comunidad de estudiosos y expertos, de la cual los homenajeados hacen parte.
- Unos principios y procedimientos académicos e intelectuales compartidos, que indaguen y muestren un modo de participación en un proyecto común.
- Una técnica establecida y su práctica disciplinar regular.
- Una orientación profesional planificada y practicada con otros compañeros, que integre semejanzas y ajuste diferencias.

Estas notas introductorias plantean un doble reto, pues proponen resumir y presentar algunos datos profesionales sobre Isidoro Segovia y Pablo Flores, al abordar esta tarea con ocasión de la coincidencia temporal en su jubilación.

Por ello, cuando queremos sintetizar las coincidencias profesionales de personalidades diferentes como las de Isidoro Segovia Alex y Pablo Flores Martínez, mediante su ejemplificación en tareas compartidas, no cabe resumirlas mediante una lista de actividades y publicaciones que subraye el cumplimiento formal y sostenido de sus obligaciones, como consta en sus respectivas hojas de servicio.

Mi propósito se ha orientado a identificar conceptos, ideas u opiniones sustantivas de nuestros protagonistas al respecto y evocar algunas de sus aportaciones profesionales en que hayan trabajado como coautores, singularmente aquellas en que tuve oportunidad de colaborar. Singularmente, por lo que se refiere a esta reflexión, no me ha resultado sencillo encontrar una perspectiva que muestre un enfoque común robusto y apropiado, que sintetice y resuma los conocimientos y expectativas, métodos y actitudes en los que ambos han coincidido y destacado durante sus años de trabajo profesional.

Mi argumentación reflejará mi particular valoración y aprecio sobre los dos protagonistas de este relato, personalidades didácticas fuertes, bien definidas y distintas, en quienes quiero reconocer la honestidad, valor profesional y sentido intelectual del trabajo en educación matemática.

Resulta grato reconocer aquellas virtudes humanas, cualidades docentes e investigadoras en las que han destacado nuestros compañeros en el momento en que concluyen su vida académica. Ese balance comparativo no resulta sencillo de realizar.

1.1. Objetivo de este documento

Este documento ejemplifica mi interpretación de la actividad que han realizado Pablo e Isidoro en las pasadas décadas, por el trabajo compartido por ellos. Las ideas están recogidas de distintos documentos. Su fundamento está en textos escritos y publicados por ellos junto con otros redactados también por mí, cuya elección e interpretación son de mi responsabilidad.

Mi intención no es presentar un resumen laudatorio del *curriculum vitae* de nuestros dos compañeros en este momento de su jubilación. Mi propósito es más simple: me propongo recoger y ordenar ciertas aportaciones académicas destacables de sus biografías que permitan sintetizar aquellas contribuciones realizadas, que ponen de manifiesto comparativamente la peculiaridad y relevancia profesional alcanzada, relativa a referentes comunes, recogidas en esos mismos documentos o similares. Con este objetivo espero responder a las cuatro condiciones explicitadas en la introducción.

A partir de este propósito, desarrollo los conceptos que ambos manejan en su marco teórico y, posteriormente, ejemplifico una noción básica que funge como concepto matemático básico sencillo –*cota/acotación*– que analizo como contenido didáctico básico a partir de un texto poético, con el cual quiero mostrar ciertos sentidos y modos de uso de nociones relevantes relacionadas.

1.2. Los protagonistas

En el presente curso 2020-2021 se produce la jubilación de los profesores Isidoro Segovia Alex y Pablo Flores Martínez, profesores titulares de Universidad en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada; también ambos investigadores del Grupo Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico FQM-193 (http://fqm193.ugr.es) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI).

Isidoro Segovia se incorpora al área de conocimiento Didáctica de la Matemática (DDM) a principios de marzo de 1981, para cubrir plaza de Profesor Contratado en la entonces Cátedra de Matemáticas de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de EGB de Granada, por fallecimiento de la profesora Romero Fornovi. A lo largo de cuarenta años ha desarrollado su docencia e investigación en el área de DDM en la UGR.

Pablo Flores se incorpora al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (DDM-UGR) en 1989, mediante concurso de méritos en un programa de promoción para Profesorado de Secundaria en las Universidades Andaluzas. A lo largo de 24 cursos ha desarrollado su docencia e investigación en el área de DDM en la UGR.

Desde su incorporación, Isidoro y Pablo se integran plenamente en el área de DDM, impartiendo docencia en la práctica totalidad de las materias troncales y optativas correspondientes al área, singularmente en el diseño de sus módulos prácticos. Lideran la planificación de las materias de Educación Matemática en el Plan de Estudios de Magisterio de 1971, en la Diplomatura de Profesorado de EGB, en las asignaturas correspondientes a la Licenciatura de Matemáticas: Didáctica de la Matemática en Bachillerato y Prácticas de Enseñanza, y sus modificaciones sucesivas. Igualmente, planifican las materias troncales en las distintas especialidades de los Grados de Magisterio debidos al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES).

2. Marco teórico: comunidad de educadores matemáticos

La actividad profesional de Isidoro y de Pablo en la UGR se realiza en el Departamento de Didáctica de la Matemática, durante el casi medio siglo de su vida profesional. Su actuación está dedicada a enseñar conceptos básicos bien establecidos, relacionados por procedimientos sencillos y destrezas precisas, con los cuales desarrollan actitudes positivas hacia las matemáticas escolares y hacia la planificación y consecución de sus aprendizajes. Esas nociones organizan los contenidos didácticos para formar al profesor de matemáticas y hacer inteligible los mundos físico, intelectual y social en las aulas. Mediante nociones educativas y matemáticas básicas organizan y representan la estructura de la realidad, así orientan y dirigen la formación de docentes.

2.1. Ámbito de actuación: educación matemática

Tanto entre docentes de matemáticas en el sistema educativo como entre expertos en las diversas disciplinas matemáticas, identificamos a los educadores matemáticos como profesionales, miembros de una comunidad vinculados conjuntamente con la matemática y la educación:

> Entendemos por educador matemático a toda persona que pretende formar o instruir a otra, u otras, mediante las matemáticas, es decir, considera las matemáticas en todo o en parte como objeto de educación para las personas a cuya formación y desarrollo está contribuyendo. (Rico y Sierra, 1991, p. 22)

Esta caracterización permite distinguir los profesores de matemáticas de los investigadores en educación matemática; ambas comunidades como colectivos profesionales diferentes, de intersección no vacía, en la comunidad de educadores matemáticos. Los miembros del Grupo FQM-193, con Pablo e Isidoro incluidos, compartimos una visión cultural de las matemáticas:

> ¿Qué entendemos por educación matemática? Niños, adolescentes y jóvenes reciben parte importante de su herencia cultural a

> través de un sistema social de formación organizado, que se denomina *sistema educativo*. Las matemáticas forman parte de la cultura que transmite el sistema educativo y son parte esencial de la formación básica que han de compartir todos sus miembros; por ello tiene pleno sentido hablar de educación matemática. [...] Desde la perspectiva del especialista consideramos la educación matemática como conjunto de ideas, conocimientos y procesos implicados en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional. La educación matemática que se transmite por medio del sistema escolar tiene rasgos epistémicos de actividad científica básica [...] También la actividad de los profesores y los procesos para su formación como profesionales quedan comprendidos dentro de la educación matemática. (Rico *et al.*, 2000, pp. 351-406)

La educación matemática puede entenderse como la actividad de una comunidad de indagación erudita, dirigida al conocimiento y comprensión de los procesos implicados en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en la creatividad matemática (Rico, 2012, pp. 89-92). Desde esta perspectiva, en el marco teórico de nuestros autores, los contenidos matemáticos del currículo, junto con sus significados, también se entienden como contenidos didácticos.

> La creación matemática se puede vincular a ritmos variados, también a los contrapuntos de espacio y de tiempo. No todo es suma o resta de funciones ni la multiplicación de coeficientes, ni la meridiana claridad en el manejo de las incógnitas. (Azuela, 1993, p. 15)

2.2. Contenidos matemáticos y didácticos

Números y figuras constituyen campos conceptuales diferentes, ambos campos de reflexión organizados mediante conceptos y estructuras, que sostienen el conocimiento matemático de referencia. Números y formas no son objetos matemáticos distintos, separados o alternativos, más bien se complementan por múltiples relaciones que constituyen conceptos y estructuras nuevas, dan lugar a disciplinas matemáticas distintas, enriquecen y profundizan ideas primitivas, extienden su ámbito inicial, aplican y mejoran la inteligibilidad del mundo en términos de tales símbolos y figuras.

> Lo que más llama la atención al matemático en formación es la supuesta armonía. [...] Lo esencial se va dando: los números y las figuras geométricas se entrometen en su diseño. El universo tiene sentido, adquiere una razón de ser, por la medida de sus cuerpos, sus volúmenes y sus pesos, por sus distancias recorridas y sus tiempos transcurridos. Detrás de todo hay una cantidad, una línea, una curva, un número; hay un lenguaje adquirido por los sabios de la aritmética y de la geometría [...] Parece que la esencia de cada elemento, cada línea, cada trazo, cada objeto, corresponde a un número; nada escapa a una cantidad precisa. El sueño de Pitágoras parece cumplirse en la mente del observador. [...] Entre sentimientos confusos el cosmos tiene un sentido, un proyecto, una ingenua geometría por todos sus rincones. (Azuela, 1993, pp. 36-41)

Las preferencias didácticas de Isidoro y Pablo se orientan hacia los significados de conceptos y estructuras matemáticas básicas y generales, junto con sus correspondientes alternativas didácticas. Isidoro prioriza la intencionalidad y condiciones de aprendizaje de los contenidos matemáticos escolares, singularmente los significados de los contenidos numéricos, así como las tareas y modos de uso que planifican su enseñanza. Pablo centra su atención en las tareas y procesos de aprendizaje escolar, junto con el diseño y coherencia de esas tareas; singularmente, los sentidos y las expectativas, sus imitaciones, y oportunidades.

3. Organización y práctica disciplinar

El análisis de los contenidos didácticos identificados en los documentos y los textos educativos generales, y en los documentos curriculares específicos sobre matemáticas escolares identifica el conocimiento didáctico del profesor y muestra los concepto y categorías para su organización. Tal análisis identifica y caracteriza tres funciones distintas de los expertos en educación matemática, según destaquen estructuras y tareas formales propias de un investigador, conceptos necesarios para un formador, o nociones prácticas y técnicas de un responsable de planificar la actividad escolar. Cuando un experto se ciñe a alguna de esas funciones, elige y da preferencia a una opción dependiendo de los fines y objetivos de formación escolar que se propone alcanzar y de los tipos de textos elegidos para su análisis (Flores, 2016, pp. 69-84).

3.1. Contenido didáctico en el currículo de matemáticas

Un educador matemático experto puede ejercer como investigador ante la comunidad de educadores matemáticos. Como *investigador*, el profesional *indaga* en los *fenómenos*, detecta e *identifica problemas* que descubre, los *interpreta* y avanza nuevas respuestas cuyas soluciones *critica e integra*; mediante ellas *fundamenta conocimientos objetivos* que comparte para contribuir a un mejor desarrollo de la disciplina.

Un experto actúa como *formador* cuando *trasmite* a los educadores matemáticos *experiencias* consolidadas y *conocimientos* fundados, que les inician y habilitan para un *ejercicio profesional competente* en la enseñanza de las matemáticas, fomenta el *dominio técnico* de recursos y materiales didácticos, y les proporciona *maestría* en la *construcción, comprensión y comunicación de significados para las matemáticas escolares*. Como formador, el *experto sistematiza y racionaliza los contenidos didácticos de las matemáticas escolares* que requiere para su trabajo el profesional competente.

En tercer lugar, como *planificador*, el experto *diseña e implementa propuestas* prácticas para la enseñanza de la matemática, *inteligibles y comunicables*; escoge *actuaciones prácticas y compartidas*, teóricamente interpretables, técnicamente *viables* y fácilmente *revisables.* Como planificador, el experto selecciona los *contenidos de las matemáticas escolares*, los *dota de significado* y los *organiza mediante unidades didácticas* para su *comprensión por los escolares* (Rico, 2019).

3.2. Marco teórico compartido: currículo en educación matemática

En sentido educativo general, *currículo* es un término establecido para denotar la *planificación y puesta en práctica de un programa de formación*. Un currículo consiste en una propuesta de actuación educativa y su realización; se sitúa entre la declaración de principios generales y su traducción práctica, entre lo que se prescribe y lo que sucede en el aula. Cada currículo concreta unos principios ideológicos, conceptuales, pedagógicos y psicopedagógicos que, en conjunto, proponen una orientación para el sistema o institución educativa (Stenhouse, 1984).

3.3. Nociones preferentes

Pablo e Isidoro han trabajado detallada y sistemáticamente los documentos y textos de los currículos escolares de geometría y de los sistemas numéricos. Estas opciones responden a la importancia que tienen ambos sistemas conceptuales en el currículo de la educación obligatoria, que atienden a la educación de los ciudadanos y a su desarrollo posterior, como muestran los estudios y publicaciones que cada uno ha realizado a lo largo de estos años.

Así, podemos identificar que el foco prioritario de interés para Isidoro está en los significados de las nociones de número y cantidad, es decir, en los sistemas y estructuras numéricas, sus distintas representaciones y sentidos, en los cuales las nociones de *cota/acotación* son relevantes. Prestan especial dedicación e interés por los estudios evaluativos para interpretar la calidad de los aprendizajes escolares mediante técnicas cuantitativa y soporte estadístico.

Por el contrario, las preferencias de Pablo se han orientado hacia los significados didácticos de nociones lógicas, relaciones deductivas y estructuras preferentemente cualitativas; los estudios e investigaciones a los que Pablo ha prestado especial atención a nociones y análisis cualitativos trabajan con soportes factoriales, análisis clústeres y multivariantes, buscando correlaciones entre resultados que ayuden a establecer implicaciones o incompatibilidades correlaciónales. Pablo ha trabajado indistintamente sobre diferentes campos y estructuras matemáticas, con cierto gusto por las formas, trasformaciones relaciones geométricas. En todos los casos ha prestado atención a los significados –representaciones, estructuras y sentidos– de tales nociones.

Cada uno presta prioridad a unos conceptos matemáticos y los sistemas señalados por diferencias fáciles de identificar.

3.4. Niveles de reflexión y estructura curricular

Los niveles de reflexión que se abordan y estudian desde un marco curricular son diversos. Los niveles se presentan al trabajar un currículo concreto. Así, cuando se asume el currículo como plan de trabajo para el profesor, como plan de acción, la *actuación en el aula* es el nivel de concreción elegido. Las Órdenes del Ministerio de Educación regulan la concreción curricular, centran el plan de trabajo para unas condiciones espacio temporales dadas y lo expresan mediante unos contenidos, objetivos, metodología y criterios de evaluación.

La administración educativa marca otro nivel, que contempla el currículo como instrumento de *actuación en el sistema escolar* y propone otro nivel de concreción curricular. Los conocimientos se sistematizan mediante materias y asignaturas, los aprendizajes escolares se organizan por niveles, los profesores asumen responsabilidades, el centro escolar realiza la evaluación.

También se trabaja el currículo desde un nivel de *reflexión disciplinar y académica*, donde se estudian sus fundamentos teóricos y su implementación en el aula desde distintas disciplinas. Facultades de Educación y Centros de Formación, abordan el estudio especializado del currículo de matemáticas.

En cada nivel de reflexión resultan pertinentes las cuestiones curriculares para qué esa formación, cuáles contenidos de formación, cómo se puede alcanzar y qué formación se alcanzó. Las componentes proporcionan un núcleo de conceptos, que dan respuesta adecuada a cuestiones curriculares básicas en cada nivel (Rico, 1997).

3.5. Organizadores del currículo

Para formar profesores de matemáticas, consideramos necesario disponer de un marco compartido de ideas fundadas, basadas en conceptos y categorías, que estructuren la información que se identifica de cada currículo, sistematice su estudio, lo caracterice y permita su comparación con otras propuestas distintas. Dimensiones y niveles curriculares proporcionan una estructura inicial para el currículo que se trabaja. En cada dimensión y nivel se trabaja con un sistema de categorías propias conocidas como *organizadores del currículo* (Flores, 2016; Rico, 1997). Cada concepto elegido como objeto de análisis se estudia mediante los términos y sentidos clave identificados sobre el texto escolar escogido (Rico, 2016, p. 96; Rico y Ruiz-Hidalgo, 2018). Dicho concepto se maneja con el método de análisis, mediante el cual se identificarán, extractarán y sintetizarán las nociones subordinadas y los elementos relacionados relevantes. Tal método de análisis se sustenta en la identificación, organización, secuenciación y jerarquización de las unidades o elementos de formación, obtenidos de textos, documentos y materiales curriculares, según dimensiones, categorías y componentes didácticos, haciendo parte de la estructura conceptual basada en la noción de currículo.

4. Orientación profesional planificada y practicada

Desde el curso 2010-2011, las universidades españolas adecuaron sus titulaciones al marco establecido por el Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). El marco europeo parte de la Declaración de Bolonia, aprobada por 29 países europeos, entre ellos España. La Declaración tiene como objetivo estructural la adopción de un sistema de titulaciones flexible y comparable, sostenido por un sistema de créditos comunes: Sistema Europeo de Transferencia de Créditos, ECTS (*European Credit Transfer System*), junto con la promoción de referencias comunes europeas para la educación superior, con énfasis en la cooperación curricular y el fomento de la empleabilidad.

4.1. Aportaciones

Pablo e Isidoro han destacado por asumir el liderazgo en la programación y la orientación de los créditos de las asignaturas troncales correspondientes al área de Didáctica de las Matemáticas en las distintas especialidades para los Grados de Magisterio, y de Matemáticas dentro de un marco curricular. Desde comienzos del siglo XXI, la contribución de nuestros protagonistas en el trabajo editado por Castro (2001) muestra prioridades claras en sus aportaciones desde los comienzos de la reforma de los planes de estudios: *Aprendizaje y evaluación* (Flores, 2001, pp. 41-60) y *Unidades didácticas. Organizadores* (Segovia y Rico, 2001, pp. 83-104).

También en estos últimos años nuestros autores han contribuido en su docencia a configurar los Programa de Tercer Ciclo de Didáctica de la Matemática, Programa de Formación de Profesores de Matemáticas de Secundaria cuya responsabilidad han mantenido. Singularmente, destacan en la coordinación de los trabajos de diseño, planificación, implementación y evaluación de los materiales didácticos preparados.

4.2. Colaboración con Isidoro Segovia

La prioridad que Isidoro concede a los sistemas y estructuras numéricas como campo conceptual preferente para atender a la formación de Maestros y profesores de Secundaria ha tenido una amplia difusión y se encuentra tratada en el libro *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria* (Segovia y Rico, 2011), materia obligatoria dirigida a los alumnos de Primer Curso de todas las especialidades del actual Grado de Maestro. Este manual está coordinado por Segovia y Rico, y participan en su redacción otros 21 autores; este libro se estructura en 17 capítulos de los cuales 11 se dedican a estructuras aritméticas, cantidades y su medida, 4 capítulos a geometría y 2 a la iniciación en estadística y probabilidad.

El libro *Estimación en Cálculo y Medida* (Síntesis, 1989) es un documento anterior, preparatorio de la tesis doctoral de Isidoro, manual dirigido a profesores de Educación Secundaria, desarrolla y sistematiza el campo conceptual correspondiente, descuidado en los programas escolares y en la formación del profesorado. Las ideas y conceptos relacionados con las nociones de cota y de acotación, desempeñan un papel relevante en esta estructura.

4.3. Colaboración con Pablo Flores

Entre los trabajos en que colaboro con Pablo Flores destaca el libro *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (Pirámide, 2015), materia opcional dirigida a los alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria, y en varias especialidades como el Grado de Maestro de Educación Física. Educación Infantil, y otros ofertados en cada Universidad. Este manual está coordinado por Flores y Rico y se estructura en 15 capítulos, donde participan en su redacción 25 autores. Se organiza en tres partes: «Fundamentos», «Sentido matemático escolar» y «Enseñanza y aprendizaje».

> Los autores hemos centrado nuestra propuesta en el desarrollo de conocimientos, el logro de capacidades y la mejora de actitudes relativas a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas escolares. Para ello hemos propuesto un marco estructurado general sobre el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, ampliamente ejemplificado. [...] Una primera parte dedicada a fundamentos y cuestiones generales. [...] Nociones centrales son las de análisis cognitivo y análisis de instrucción, junto con sus organizadores. [...] La segunda parte consta de otros cuatro capítulos, centrados en el sentido matemático escolar para cada uno de los bloques de contenidos establecidos por el currículo para las matemáticas escolares de la educación obligatoria. [...] La tercera parte está dedicada a la enseñanza y aprendizaje de distintos conceptos y estructuras que destacan en el currículo de matemáticas. [...] La propuesta formativa que se hace al estudiante para maestro es amplia y diversificada. Ejemplifica detalladamente el marco conceptual establecido previamente mostrando la utilidad de los organizadores curriculares sobre aprendizaje y enseñanza. (Flores y Rico, 2015, pp. 17-18)

4.4. Colaboraciones conjuntas

Como broche a los trabajos en colaboración con Segovia y Flores, destaco los capítulos redactados en el libro *Elementos de Didáctica de la Matemática para el profesor de Secundaria* (Rico y Moreno, 2016), con 20 capítulos y estructurado en 5 bloques, en donde participan 8 autores. El libro está dirigido a la formación didáctica de los profesores de matemáticas de Secundaria.

Tanto Segovia como Flores participan como autores de este libro, el primero responsable de la autoría de un capítulo y el segundo de tres. La participación de nuestros compañeros en este manual ha supuesto una profundización destacada en el marco curricular y en la determinación de los contenidos didácticos mediante los conceptos y categorías que sustentan el análisis didáctico.

Manual de referencia para este tercer libro es el documento *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (Rico *et al.*, 2013), con 21 capítulos estructurado en 4 partes, donde participan 41 autores. El libro recoge aportaciones de miembros del grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193) y otros grupos de investigación afines, resultados de investigaciones, artículos, publicaciones, comunicaciones e intervenciones en seminarios y congresos. Isidoro y Pablo han asumido de modo continuado y coordinado el liderazgo en la programación y la orientación de los créditos de las asignaturas troncales correspondientes al área de Didáctica de las Matemáticas de las distintas especialidades para los recientes Grados de Magisterio, y Matemáticas.

También han contribuido con su docencia a configurar los Programas de Tercer Ciclo de Didáctica de la Matemática, Programa de Formación de Profesores de Matemáticas de Secundaria en estos últimos años a cuya elaboración han contribuido ininterrumpidamente.

4.5. Investigación

Pablo e Isidoro son miembros activos del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193), del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (PAIDI) de la Junta de Andalucía, Sus contribuciones la concretan sus propuestas y participación en proyectos de investigación, redacción de informes, dirección de tesis doctorales, tesinas y otros documentos de investigación; colaboración en publicaciones, memorias, artículos y comunicaciones, asistencia a congresos, contribución en encuentros y reuniones relativas a las líneas de investigación de dicho grupo.

Información detallada de la actividad investigadora, las producciones y las publicaciones derivadas de nuestros protagonistas se pueden localizar en http://fqm193.ugr.es

5. Sentido y significado: ejemplo de análisis – sentido de la noción de *acotación*

Seguidamente, se muestra el esquema de un proceso con cinco pasos o apartados consecutivos que ejemplifican una secuencia para establecer el sentido de las nociones de *cota/ acotación*, siguiendo un texto literario. El método derivado de los pasos señalados es:

I. El texto
II. Términos y sentidos clave
III. Sentido en el texto
IV. Funciones de la acotación
V. Técnicas de acotación

Con este esquema, derivado de analizar el sentido en el texto de un poema, trato de ejemplificar un análisis de significado mediante estudio de los sentidos de las nociones *cota/acotación* en un brillante texto poético.

Se muestra la búsqueda del sentido matemático de esas nociones en el poema *La ventana* (Oliván, 2018) (véase Apéndice).

La secuencia siguiente destaca los cinco pasos que llevan a cabo un análisis del término *acotación*, hasta llegar al sentido y sus técnicas en el texto manejado:

Texto → Términos y sentidos → Sentido en el texto → Funciones del concepto *acotación* → Técnicas de uso del concepto

El análisis didáctico propone profundizar en la riqueza y variedad de los significados de los conceptos matemáticos escolares y didácticos mediante estudio de los sentidos y modos de uso del término que lo expresa. Este método permite plantear, entre otras, las cuestiones siguientes:

- ¿Qué textos introducen/utilizan un concepto básico?
- ¿Cuántos usos tienen los términos *cota/acotación*?
- ¿Cuáles son matemáticos? ¿Cuáles son numéricos y cuáles geométricos?

Estructuras matemáticas, Representaciones y Sentidos son componentes que caracterizan los significados de un concepto matemático escolar. Entender, procesar y usar apropiadamente un concepto matemático escolar son tres condiciones de su dominio. En este análisis acotación es un concepto básico, útil para aritmética y geometría, que hemos ejemplificado.

Sirva este sencillo ejemplo para mostrar la profundidad y alcance del marco conceptual manejado, junto con los procedimientos seguidos, la organización disciplinar, y la orientación profesional empleada. Nociones básicas como los sentidos de cota/acotación permiten vincular la orientación metodológica y docente de ambos autores, en simultáneo, junto con las raíces de mi vinculación con el trabajo de ambos.

6. Conclusión

Quienes conocen a Isidoro Segovia y a Pablo Flores pueden convenir que, siendo dos personalidades bien definidas, con grandes capacidades profesionales, vocacionalmente dedicados a la formación de profesores y empeñados en contribuir al desarrollo de unos mismos proyectos, no por eso dejan de tener perfiles didácticos y profesionales singulares y bien diferenciados. En estos ámbitos, ambos dan prioridad al trabajo escolar y didáctico mediante estudio analítico de conceptos y estructuras matemáticas, con prioridades conceptuales muy diferentes: números y cantidades vs. forma, tamaño y posición.

Como hemos desarrollado, nuestros jubilados han profundizado en el dominio y la observación de fenómenos didácticos, mediante empleo de los marcos teóricos descritos y de otros distintos, manteniendo un método analítico similar en las cuatro dimensiones trabajadas: conceptual, intencional, organizativa y evaluativa.

Otros muchos aspectos de su actividad han quedado sin desarrollar, especialmente las actividades investigadoras y las de administración y gestión. Esta última, merecedora de un estudio particular, la personalidad y el trabajo de Isidoro y de Pablo han marcado fuertemente la orientación, el desarrollo y el progreso del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en los últimos 25 años tareas que han realizado con dedicación, generosidad y lucidez.

Esta historia queda por escribir, lo cual se hará detalladamente en algún momento. A sus compañeros nos queda reconocer su buen hacer, disponibilidad, naturalidad y ausencia de protagonismos.

7. Referencias

Azuela, A. (1993). *El matemático*. Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Seminario de Cultura Mexicana.

Castro, E. (ed.). (2001). *Didáctica de la matemática en Educación Primaria*. Síntesis.

Flores, P. (2001). Aprendizaje y Evaluación. En: Castro, E. (ed.). *Didáctica de la matemática en Educación Primaria* (pp. 41-60). Síntesis.

Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Colección Mathema. Comares.

Flores, P. (2016). Textos para el currículo de matemáticas. En: Rico, L. y Moreno, A. (coords.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 69-84). Pirámide.

Flores, P. y Rico, L. (coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Pirámide.

Oliván, L. (2018). *Para una teoría de las distancias*. Tusquets.

Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En: Rico, L. (ed.). *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria* (pp. 377-414). Síntesis.

Rico, L. (2012). Aproximación a la Investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*, 39-63.

Rico, L. (2019). Categorías para análisis de los contenidos didácticos en el currículo de matemáticas. *Proceedings XV CIAEM. Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. Universidad de Medellín.

Rico, L. y Moreno, A. (coords.). (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Pirámide.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (eds.) (2013). *Análisis didáctico en educación Matemática. Metodología de Investigación, Formación de Profesores e innovación Curricular*. Comares.

Rico, L. y Sierra, M. (1991). La Comunidad de Educadores Matemáticos. En: Gutiérrez, A. (ed.). *Área de Conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 12-58). Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Síntesis.

Rico, L. y Sierra, M. (2000). Didáctica de la Matemática e Investigación. En: Carrillo, J. y Contreras, L. C. (eds.). *Matemática española en los albores del Siglo XXI* (pp. 77-131). Hergué.
Rico, L., Sierra, M. y Castro, E. (2000). Didáctica de la Matemática. En: Rico, L. y Madrid, D. (eds.). *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares* (pp. 351-406). Síntesis.
Rico, L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2018). Ideas to work for the curriculum change in School Mathematics. En: Shimizu, Y. y Vithal, R. (eds.). *School Mathematics curriculum reforms: Challenges, Changes and opportunities. Proceedings ICMI Study 24. Tsukuba (Japan)* (pp. 301-308). ICMI.
Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Colección Mathema. Comares.
Segovia, I., Castro, E., Rico, L. y Castro. E. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Síntesis.
Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas: Organizadores. En: Castro, E. (coord.). *Didáctica de la matemática en Educación Primaria* (pp. 83-104). Síntesis.
Segovia, I. y Rico, L. (coords.). (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Pirámide.
Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículum*. Morata.

8. Apéndice

Poema *La ventana* extraído de Oliván (2018, pp. 17-18)

I. El texto

La ventana engrandece lo que enmarca,
une todo con todo:
el estudiante de la bufanda roja,
los obreros de azul, saliendo de aquel bar con prisas
el perro absurdo que observa con su hocico,
en ella,
ahora,
significan más.
Basta con acotar nuestra mirada,
para que en su interior crezca una red
que pesca entre las cosas peces vivos
Escribir poesía es, de algún modo,

Estar enfermo de buscar ventanas.
Y estar enfermo de pensar quien puede,
Borrosamente
Desde el otro lado
Mirarte a ti
Significando qué

II. Términos y sentidos clave

La ventana engrandece lo que enmarca,
une todo con todo:
el estudiante de la bufanda roja,
los obreros de azul, saliendo de aquel bar con prisas
el perro absurdo que observa con su hocico,
en ella,
ahora,
significan más.
Basta con acotar nuestra mirada,
para que en su interior crezca una red
que pesca entre las cosas peces vivos
Escribir poesía es, de algún modo,
Estar enfermo de buscar ventanas.
Y estar enfermo de pensar quién puede,
Borrosamente
Desde el otro lado
Mirarte a ti
Significando qué

III. Sentido en el texto

Ventana engrandece lo que enmarca, une todo con todo, en ella, ahora, significan más. Acotar nuestra mirada, Escribir poesía, buscar ventanas. Y estar enfermo de pensar quién puede. Mirarte a ti, Significando qué.

IV. Funciones de la acotación

Engrandecer, significar, incrementar el conocimiento

V. Técnicas de acotación

Escribir, buscar límites, mirar, significar

2

Instrumentos para la evaluación del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje matemático

Instruments for the assessment of number sense in the early years of mathematical learning

NATIVIDAD ADAMUZ-POVEDANO, ELVIRA FERNÁNDEZ-AHUMADA, ENRIQUE MARTÍNEZ-JIMÉNEZ Y MANUEL TORRALBO-RODRÍGUEZ
Universidad de Córdoba

Resumen
En el ámbito de la investigación en educación matemática, la importancia del sentido numérico ha estado presente desde hace décadas. Sin embargo, a pesar de esta larga trayectoria, no se ha llegado a un consenso sobre su definición. En la mayoría de los casos, los autores se limitan a dar un listado de indicadores que evidencian el grado de desarrollo en relación con las competencias numéricas. Por otro lado, recientemente, tanto marcos normativos como referentes universales han puesto de manifiesto la importancia de fomentar el sentido numérico desde los primeros años de aprendizaje. Por ello, se hace necesario disponer de instrumentos que permitan medir y evaluar la adquisición y desarrollo de esta competencia matemática en escolares. En este trabajo, se ofrece una revisión bibliográfica sobre los instrumentos existentes en la literatura con los que medir las diferentes dimensiones que constituyen esta importante componente del conocimiento matemático.

Palabras clave: alfabetización matemática, sentido numérico, evaluación, test

Abstract
In the field of Mathematics Education research, the importance of number sense has been present for decades. However, despite this long history, no consensus has been reached on its definition. In most cases, authors limit themselves to giving a list of indicators that show the degree of development in relation to numeracy skills. On the other hand, recently, both regulatory

frameworks and universal references and have highlighted the importance of fostering number sense from the earliest years of learning. For this reason, it is necessary to have instruments to measure and assess the acquisition and development of this mathematical competence in schoolchildren. This work offers a bibliographical review of the existing instruments in the literature with which to measure the different dimensions that make up this important component of mathematical knowledge.

Keywords: numeracy, number sense, assessment, test

1. Introducción

La aritmética escolar recibe un tratamiento privilegiado dentro de los bloques de contenidos del área de matemáticas en la etapa de Educación Primaria. En cierto modo, tiene su razón de ser, ya que la aritmética tiene valor en sí misma y, además, sirve de soporte para el aprendizaje de otros contenidos matemáticos. No obstante, para conseguir esa transferencia necesaria a otros bloques de contenidos, se deben generar oportunidades de aprendizaje que tienen que ir mucho más allá de un entrenamiento instrumental del cálculo escrito, que es a lo que se reduce en muchas ocasiones la enseñanza-aprendizaje de la aritmética escolar. En ese sentido, no podemos perder de vista que el modelo de aprendizaje actual está basado en el desarrollo de competencias; por tanto, el objetivo principal de la matemática escolar no es que nuestros estudiantes sean eficientes calculadoras humanas, sino procurar su alfabetización matemática, entendiendo esta como:

> [...] la capacidad de un individuo para identificar y entender el papel que las matemáticas tienen en el mundo, hacer juicios bien fundamentados y usar e implicarse con las matemáticas en aquellos momentos en que se presenten necesidades para su vida individual como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (Rico, 2005, p. 9)

En el ámbito de la educación matemática aparece el término de *sentido matemático escolar* (Lupiáñez y Rico, 2015), muy vinculado al de *competencia matemática*. Dentro del sentido matemático, se establece la distinción entre cuatro sentidos: sentido numérico, sentido de la medida, sentido espacial y sentido estocástico. En este capítulo nos centramos en el sentido numérico, tratando de elaborar una revisión de la literatura en torno a este término y los distintos instrumentos que lo miden y evalúan.

2. Sentido numérico

La primera vez que aparece en la literatura científica el término *sentido numérico* es de la mano de Tobías Dantzig (1954), haciendo referencia a una habilidad que posee la persona a través de la cual puede reconocer cambios en pequeñas colecciones de elementos, incluso sin poseer conocimientos relacionados con el conteo o la secuencia verbal. Desde entonces, pero sobre todo a partir de los años ochenta, encontramos numerosos autores que tratan de delimitar el concepto o constructo de *sentido numérico* (Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2019). Prueba de ello es el incremento de trabajos publicados con el término de *sentido numérico* en el título, desde los 13 artículos publicados en la década de los noventa hasta los 71 artículos publicados desde 2010 a 2016 (Whitacre *et al.*, 2020), o los 103 que encontramos haciendo una búsqueda simple en la base de datos SCOPUS en el intervalo de años del 2017 al 2021.

Haciendo un análisis de esa literatura, se encuentran numerosos trabajos que ponen de manifiesto las dificultades para definir el término (Andrews y Sayers, 2015; Berch, 2005; Dunphy, 2006; Howell y Kemp, 2005; Lago y DiPerna, 2010; McIntosh *et al.*, 1992, Sowder, 1992). En general, se distinguen dos grandes corrientes en relación con el sentido numérico. Por un lado, está la corriente de los científicos cognitivos y, por otro, la de los educadores matemáticos. Según Berch (2005), ambas corrientes conciben el sentido numérico de forma distinta considerando dos órdenes; un orden inferior que considera al sentido numérico como un sentido de la cantidad perceptual innato, como algo que forma parte de nuestro legado genético, y un orden superior que considera el sentido numérico como un sentido conceptual adquirido a través de la experiencia. Este autor comparte la idea de Dehaene (2011) en relación con la necesidad de hipotetizar sobre un sentido numérico único, en lugar de concebirlo como constituido por retales de representaciones y habilidades.

Castro y Segovia (2015), desde la perspectiva de la educación matemática, lo definen como:

> [...] una competencia cognitiva que se adquiere y se desarrolla gradualmente mediante la actividad en el campo numérico, como resultado de explorar números y relacionarlos con procedimientos que se limiten solo a los algoritmos tradicionales. (p. 111)

Desde esta misma perspectiva de la Educación Matemática, McIntosh *et al.* (1992) afirman que es un término difícil de describir, aunque reconocible en la acción, y que el debate debería basarse en alcanzar una definición, caracterización o modelo que describa el sentido numérico de forma clara y completa. Consideran que cuanto más claramente se entienda el sentido numérico, más probable será el progreso en la investigación, así como en el desarrollo del currículo y la instrucción.

Por su parte, Andrews y Sayers (2015), fruto de la revisión bibliográfica hecha con relación a este término, identifican tres perspectivas distintas aunque relacionadas entre sí: *sentido numérico preverbal*, que refleja percepciones numéricas que son innatas a todos los humanos y comprende la comprensión de pequeñas cantidades de manera que permiten la comparación (estaría en sintonía con lo que Berch (2005) había considerado como orden inferior), *sentido numérico funcional,* que engloba aquellos conocimientos relacionados con los números que requieren instrucción y que suelen producirse durante los primeros años de la escuela y, por último, el *sentido numérico aplicado,* que se refiere a un conjunto de conocimientos básicos relacionados con los números, que impregnan todo el aprendizaje de las matemáticas, considerándose como necesario para todos los adultos, independientemente de su profesión, y cuya adquisición por parte de todos los estudiantes debería ser uno de los principales objetivos de la enseñanza obligatoria (McIntosh *et al.*, 1992).

En todos los casos vistos hasta ahora, los autores consideran que el sentido numérico surge como conceptualizaciones o interpretaciones de un mismo constructo. En contraposición, Whitacre *et al.* (2020), en una revisión de la literatura de más de 140 artículos, concluyen que se trata de un problema de polisemia y bajo el término de *sentido numérico* se incluyen tres constructos diferentes que ellos denominan *sentido numérico aproximado*

(SNA), *sentido numérico temprano* (SNT) y *sentido numérico maduro* (SNM).

El SNA está incluido dentro de las habilidades neurológicas que tenemos al nacer, por lo cual está relacionado con el orden inferior establecido por Berch (2005) y con el sentido numérico preverbal de Andrews y Sayers (2015). Tiene que ver con la percepción y la discriminación de cantidades más que con un conocimiento explícito de los nombres y símbolos de los números. Dentro de este constructo estarían los trabajos de Dehaene (2001) o Geary *et al.* (2015), entre otros. Las habilidades neurológicas asociadas al SNA son la subitización, la discriminación cardinal y el uso de la línea numérica mental. En los trabajos relacionados con este constructo, se observa que se evalúa de distinta forma dependiendo de la población de estudio. Por ejemplo, en el caso de los bebés se analiza la cantidad de atención prestada ante un cambio de cantidad observada, habiendo un movimiento de elementos que se quitan o se añaden (Libertus y Brannon, 2009). En el caso de niños y adultos, se suelen centrar en las habilidades de los participantes para discriminar cantidades de dos conjuntos, pero en este caso ante una situación estática (Halberda y Feigenson, 2008). También hay investigaciones en las que se hacen mediciones neurológicas para ver la actividad cerebral durante el desarrollo de una tarea.

El SNT incluye habilidades aprendidas que involucran un conocimiento explícito de los números, como contar elementos o relacionar números representados simbólicamente con numerales. Se le considera un importante predictor del éxito escolar en la escuela (Jordan *et al.*, 2009), de forma que las habilidades del SNT están en consonancia con las matemáticas escolares en los primeros años de aprendizaje, a pesar de que también se adquieren en contextos informales. Relacionados con este constructo, encontramos los trabajos de Andrews y Sayers (2015), Howell y Kemp (2010) o Jordan *et al.* (2010), entre otros. Aunque no hay un claro consenso entre autores, podemos señalar que aquí se encuentran fundamentalmente las capacidades de reconocimiento de números, conteo, reconocimiento de patrones numéricos, comparación de números, realización de operaciones aritméticas, conceptos de *medición* y *estimación*. En el siguiente apartado, veremos que las pruebas que se diseñan para medir este sentido numérico temprano se elaboran en función de las habilidades propuestas en cada caso por los autores.

Por último, el SNM se centra en hábitos mentales y formas de comportarse matemáticamente que se consideran deseables, como la manipulación flexible de los números. Abarca el sentido numérico de los números racionales y los estudios encontrados se centran fundamentalmente en grados intermedios y formación inicial de profesorado (Markovits y Sowder, 1994; McIntosh *et al.*, 1992; Yang y Jan, 2019). Las descripciones de los autores tienden a articularse en torno a componentes, considerándose como una definición apropiada la dada por McIntosh *et al.* (1992):

> El sentido numérico se refiere a la comprensión general de los números y las operaciones por parte de una persona, junto con la capacidad y la inclinación para utilizar esta comprensión de manera flexible para hacer juicios matemáticos y desarrollar estrategias útiles para manejar los números y las operaciones. Refleja la inclinación y la capacidad de utilizar los números y los métodos cuantitativos como medio para comunicar, procesar e interpretar la información. (p. 3)

En este caso, se observa que el sentido numérico maduro no está alineado con la matemática escolar, en el sentido de que cuanto más aferrados están los estudiantes a los procedimientos estándar menos componentes del SNM exhiben (Reys *et al.*, 1999; Reys y Yang, 1998).

3. Instrumentos de evaluación del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje

No cabe duda de que, dado que las habilidades numéricas tempranas son vitales para el aprendizaje posterior de las matemáticas (Aunio, 2019; Jordan *et al.*, 2009), resulta necesario contar con herramientas de evaluación adecuadas que ofrezcan información detallada sobre el rendimiento y desarrollo de los escolares (Purpura y Lonigan, 2015) y permitan a los docentes planificar instrucciones e intervenciones específicas (Aunio, 2019).

Entre la tipología de instrumentos existentes, Purpura *et al.* (2015) distinguen aquellos que llevan a cabo medidas discretas, evaluando componentes individuales y habilidades matemáticas específicas, frente a aquellos que realizan medidas de contenido amplio centrándose en múltiples componentes matemáticos. Foegen *et al.* (2007) indican que una herramienta que cubra una gama más amplia de contenidos podría ser un medio más idóneo para evaluar las habilidades matemáticas tempranas en escolares, ya que estas, particularmente en los primeros años, se desarrollan como una secuencia de conceptos y habilidades conectadas (National Mathematics Advisory Panel, 2008).

Los instrumentos que se presentan en este apartado están, en su mayoría, enfocados a la evaluación tanto del sentido numérico temprano como del sentido numérico maduro, según el planteamiento de Whitacre *et al.* (2020), ya que consideramos que son los de mayor interés en el ámbito de la educación matemática, precisamente por el hecho de ser sentidos que se pueden adquirir y aprender. Algunos de los instrumentos que se presentan no son específicos de sentido numérico, pero abordan algunas de sus dimensiones dentro de una evaluación más amplia. Para la exposición de los instrumentos se ha seguido un orden cronológico.

Uno de los primeros instrumentos encontrados en la literatura es el de los autores Okamoto y Case (1996), que indagaron en el desarrollo de la comprensión numérica central de 6 a 10 años de edad. En el proceso de desarrollo de un instrumento que midiera dicha comprensión, en el primer nivel, situaron ítems que reflejaran un *pensamiento unidimensional*, en concreto, los ítems se diseñaron para contrastar la existencia de una línea numérica mental. De esta forma, en el primer nivel encontramos preguntas como: «¿Qué número viene después del 7?», «¿Qué número está antes cuando cuentas hacia delante desde 0, 8, 5, 2 o 6?», «¿Qué número está antes cuando cuentas hacia atrás desde 10, 6, 4, 2 o 9?», «¿Qué número es mayor 7 o 9?» o «¿Qué número está más cerca del 5: el 6 o el 2?». En un segundo nivel, contemplaron ítems que reflejaran un *pensamiento bidimensional* que permitiera a los estudiantes adquirir dos comprensiones conceptuales: (i) la relación (aditiva) entre la columna de las unidades y la columna de las decenas en el sistema de numeración decimal y (ii) la diferencia numérica. Para la primera comprensión, encontramos preguntas como: «¿Qué número está cuatro números antes del 60?», «¿Qué número está cinco números después del 49? o «¿Cuál crees que es el número mayor de dos cifras?». En el caso de la segunda, se encuentran ejemplos como: «¿Cuántos números hay entre 3 y 9?» y «¿Cuál es la diferencia entre 8 y 3?». En el último nivel, consideraron ítems que reflejaran un *pensamiento bidimensional integrado*, de forma que los niños y niñas que los superaran estarían demostrando: (i) una comprensión conceptual integrada de todo el sistema de numeración, es decir, entienden que el principio aditivo se aplica de forma que diez decenas son una centena, diez centenas son una unidad de millar... (p. ej.: «¿Qué número está diez números después que el 99?», «¿Qué número está nueve números después que el 999?»), (ii) una comprensión de situaciones donde dos variables se compensan en una operación entre ellas de manera sustractiva (p. ej.: «Este número es el 4 y el otro número no lo conocemos. Si la diferencia entre los dos números es 3, ¿cuál es el número que falta?», y (iii) la comprensión de que las reglas aditivas se extienden a otros sistemas como el dinero y el tiempo (p. ej.: «¿Qué está más cerca de 25,35 €: 20,00 € o 30,00 €?»). Las características de este instrumento, contemplando los tres niveles que presenta, lo hacen adecuado para la evaluación del sentido numérico tanto temprano como maduro.

Un instrumento ampliamente utilizado es el denominado *Early Numeracy Test* (ENT) de Utrecht (Van de Rijt *et al.*, 1999). Como se desprende de su nombre, se trata de una evaluación del nivel de desarrollo de alfabetización numérica en niños y niñas de 4 a 7 años. Se administra individualmente, con base en una entrevista con cada niño o niña de entre 20 y 30 minutos. En la primera versión, sus autores distinguieron ocho dominios matemáticos, de conocimiento numérico y no numérico de las cantidades (habilidades numéricas de naturaleza cognitiva y habilidades relacionales de tipo piagetiano, respectivamente). Dichos dominios se centraron en conceptos de *clasificación*, *correspondencia uno a uno*, *seriación*, *comparación*, *conteo verbal*, *conteo estructurado*, *conteo resultante* y *comprensión general de los números*. En una versión posterior, se añadió el dominio de *estimación*, el cual ya aparece recogido en distintas validaciones que se han hecho de este instrumento en otros países (Araujo *et al.*, 2013; Benvenuto y González, 2017; Güven, 2019). Dadas las dimensiones abordadas, este test resultaría idóneo para la evaluación del sentido numérico temprano.

Con el objetivo de medir el conocimiento matemático global, Ginsburg y Baroody (2003) diseñaron el *Test de Capacidades Matemáticas Tempranas* cuya versión más reciente se corresponde con su tercera edición (*Test of Early Mathematics Ability* – 3.ª ed., TEMA-3). Este test mide habilidades vinculadas con la matemática informal y formal. En relación con la primera, el test consta de 41 ítems relacionados con *numeración* (secuencia verbal ascendente y descendente, cardinal de un conjunto, secuencia partida, contar verbalmente de *n* en *n*), *comparación de cantidades* (juzgar, sin contar, qué colección es mayor; orden; distancias relativas), *cálculo informal* (suma como transformación de una colección en otra mayor, contar a partir del primer sumando, la suma *n*+1 es el número siguiente a *n*) y *conceptos* (principios de cardinalidad y de conservación, relación partes-todo). En lo que respecta a la matemática formal, los 31 ítems del test versan sobre *convencionalismos* (lectoescritura de cantidades), *hechos numéricos* (conocer el resultado de operaciones sencillas, conmutatividad, dobles pequeños), *cálculo formal* (operaciones de sumas y restas de dificultad creciente) y *comprensión del sistema de numeración decimal* (reconocer el «10» como número clave, reconocer las equivalencias entre los distintos órdenes de magnitud, conmutatividad de la suma). Este test se puede aplicar en escolares de entre 3 y 8 años, con base en una entrevista individual que puede durar entre 30 y 40 minutos. Aunque sus autores lo diseñaron para evaluar el conocimiento matemático global, su análisis nos lleva a encuadrarlo como idóneo para la evaluación del sentido numérico temprano.

Por su parte, el test *Child Math Assessment* (CMA) fue desarrollado para evaluar los conocimientos matemáticos informales de los niños y niñas de 3 a 5 años en una amplia gama de conceptos (Starkey *et al.*, 2004). De esta forma, el CMA está compuesto por 16 tareas que evalúan el conocimiento matemático informal en subáreas que incluyen el número, la aritmética, el espacio/geometría, la medida, los patrones y las relaciones lógicas. Las tareas que evalúan el conocimiento numérico son: conteo de objetos, conteo de un subconjunto, conocimiento del orden de los números, comparación de números, términos numéricos ordinales y reproducción de números. Las tareas aritméticas se centraron en suma y resta con objetos concretos, suma y resta sin objetos concretos y suma de dos conjuntos. Este test está concebido para administrarlo individualmente en dos sesiones de 20-30 minutos realizadas en días distintos. La primera sesión se destina a las tareas numéricas y aritméticas, y la segunda sesión a las demás. Tanto las tareas de conocimiento numérico como de aritmética contemplan algunos de los componentes recogidos en el constructo de sentido numérico temprano.

En el contexto del diseño de una intervención para el aula de matemáticas, Wright *et al.* (2006) desarrollaron el conocido como *Learning framework in Number* (LFIN) para guiar la evaluación y la enseñanza de las matemáticas en los primeros años de aprendizaje. Entre las distintas partes de las que consta, los autores consideran que las etapas de aprendizaje de la aritmética son las más importantes, al estar vinculadas a la sofisticación de las estrategias que los escolares utilizan para contar, sumar y restar. Para la evaluación de esta parte, los autores distinguen nueve grupos de tareas: 1) secuencia verbal ascendente, 2) número posterior, 3) identificación de numerales, 4) reconocimiento de numerales, 5) secuencia verbal descendente, 6) número anterior, 7) orden de numerales, 8) sumas y 9) restas. Esta evaluación también se basa en una entrevista individualizada y el instrumento completo puede aplicarse para escolares de edad entre 4 y 9 años. Al igual que en el caso anterior, las tareas vinculadas con la aritmética en este instrumento reflejan algunos de los componentes contemplados en el sentido numérico temprano.

Los autores del instrumento *Research-based Early Mathematics Assessment* (REMA) (Clements *et al.*, 2008) pretendían diseñar una herramienta para medir los conocimientos y habilidades matemáticas de los niños y niñas de Educación Infantil (3-5 años) que abarcara ideas centrales y las áreas de destreza de las matemáticas consistentes con el pensamiento de los niños y niñas y generadoras de futuros aprendizajes. Estas áreas fueron: el número, que incluía el conteo verbal, el conteo de objetos, el reconocimiento de números y la subitización, la comparación de números, la secuenciación de números, el reconocimiento de números, la composición y descomposición de números, y la suma y la resta; la geometría; la medida; y los patrones. En este instrumento, los conceptos y procesos generales, como el pensamiento parte-todo, y los correspondientes procesos de composición y descomposición, clasificación y seriación se entretejieron en varias áreas. La clasificación se tomó como la habilidad fundacional apropiada para el dominio del análisis de datos; ningún otro concepto o habilidad de áreas como el análisis de datos, la probabilidad o las fracciones superó los criterios de selección para este nivel de edad. Este instrumento se diseñó para ser administrado de forma individual a partir de a una entrevista que puede durar hasta 60 minutos por niño o niña. Aunque se trata de un instrumento cuyo objetivo es la medida del conocimiento matemático en un sentido amplio, las dimensiones que presenta en el área del número resultan muy adecuadas para la evaluación del sentido numérico aproximado y temprano.

Entre los instrumentos que claramente aluden a la evaluación del sentido numérico, destacan los de los autores Yang *et al.* (2008) y Li y Yang (2010) para niveles de 3.º y 5.º de Educación Primaria, respectivamente. En el caso de 3.º, Yang *et al.* (2008) destacan 5 componentes del sentido numérico, que enumeran en orden según su importancia para este nivel de edad, a saber: 1) comprensión del significado de los números; 2) capacidad de usar distintas representaciones de los números y las operaciones; 3) capacidad para componer y descomponer números; 4) capacidad para juzgar la racionalidad de los resultados de los cálculos, y 5) reconocer el tamaño relativo de los números. Para el nivel de 5.º, Li y Yang (2010) mantienen esos mismos componentes, a excepción de la capacidad para componer y descomponer números. Adicionalmente, el componente que hace referencia al reconocimiento del tamaño relativo de los números pasa al primer lugar en orden de importancia, mientras que el que alude a la comprensión del significado de los números es considerado en último lugar, pues reconocen que conforme los estudiantes acumulan conocimiento matemático, este componente pasa a un segundo plano, sin dejar de ser importante para estudiantes de 5.º nivel. Estos dos instrumentos están diseñados para ser contestados en línea, haciendo uso de un dispositivo electrónico. Además, en ambos casos, para cada pregunta, se pide indicar brevemente el porqué de la respuesta seleccionada, con el objetivo de detectar las ideas erróneas que subyacen a las preguntas contestadas incorrectamente. Al igual que en el caso de Okamoto y Case (1996), estos dos instrumentos resultan muy adecuados tanto para la evaluación del sentido numérico temprano como, especialmente, para la del sentido numérico maduro.

Aludiendo de forma específica también al sentido numérico, Jordan *et al.* (2008) diseñaron un instrumento con el que poder predecir riesgos de desarrollar dificultades de aprendizaje en matemáticas en niños y niñas de entre 4 y 6 años. En su propuesta contemplan tres dimensiones: 1) habilidades y principios de conteo, así como capacidad para reconocer los números, 2) conocimiento de los números, y 3) operaciones numéricas, que incluyen cálculo no verbal, combinaciones de números y problemas de enunciado verbal. Se trata de un instrumento que se administra individualmente con una duración en torno a 30 minutos, aunque los autores trabajaron posteriormente en una versión reducida (Jordan *et al.*, 2012). La definición de *sentido numérico* que dan estos autores (habilidades interrelacionadas que implican números y operaciones; contar elementos en un conjunto hasta al menos cinco con el conocimiento de que la palabra final de la cuenta indica cuántos hay en el conjunto; discriminar entre cantidades pequeñas; comparar magnitudes numéricas y transformar conjuntos con totales de 5 o menos añadiendo o quitando elementos), así como las dimensiones contempladas en su instrumento, nos lleva a encuadrar el mismo como idóneo para la evaluación del sentido numérico temprano.

La herramienta desarrollada por Geary *et al.* (2009), *Number Sets Test*, tenía como objetivo la identificación precoz de dificultades en el aprendizaje matemático. Para ello, consideraban que dicha herramienta debía centrarse en las competencias básicas que definen el conocimiento cuantitativo antes del ingreso en la escuela. Entre esas competencias incluyen al sentido numérico apuntando que, si bien sigue habiendo desacuerdos en cuanto a su definición y alcance, como mínimo, implica la capacidad para identificar inmediatamente el valor numérico asociado a pequeñas cantidades, facilidad en el uso del recuento para cuantificar pequeños conjuntos de objetos y para sumar y restar pequeñas cantidades a y desde estos conjuntos, además de una destreza en la aproximación de las magnitudes de pequeños números de objetos y de operaciones numéricas simples. De esta forma, incluyeron cuatro bloques de tareas matemáticas que consistían en: 1) determinación con la mayor rapidez y precisión posible si los pares o tríos de conjuntos de objetos, números arábigos o una combinación de ellos coincidían con un número objetivo; 2) estimación de la posición de números en líneas numéricas vacías; 3) conteo, y 4) evaluación de la estrategia de adición seguida para sumas presentadas horizontalmente de menor (p. ej.: 3 + 6) y mayor complejidad (9 + 15). El test se diseñó para administrarlo grupalmente, con lápiz y papel y con una duración de alrededor de 10 minutos. Por sus características, este test parece adecuado para la evaluación del sentido numérico temprano.

A modo de resumen, la tabla 1 presenta la clasificación de los trabajos revisados en función del sentido numérico en el que se centran de una forma mayoritaria, según los constructos identificados por Whitacre *et al.* (2020).

Tabla 1. Clasificación de los trabajos revisados según Whitacre *et al.* (2020).

Sentido numérico temprano	Sentido numérico maduro
Van de Rijt *et al.* (1999) Ginsburg y Baroody (2003) Starkey *et al.* (2004) Wright *et al.* (2006) Clements *et al.* (2008) Jordan *et al.* (2008) Geary *et al.* (2009)	Okamoto y Case (1996) Yang *et al.* (2008) Li y Yang (2010)

4. A modo de conclusión

En este estudio se han analizado aportaciones científicas relacionadas con el término de *sentido numérico* en el ámbito de la educación matemática. Tras la revisión realizada, se ha puesto de manifiesto la dificultad existente para alcanzar un consenso en cuanto a la definición de dicho término pudiendo clasificarse la literatura existente en torno a dos grupos. Por un lado, autores que consideran el sentido numérico como un único constructo del que se hacen distintas interpretaciones y, por otro, autores que lo consideran un término polisémico con el que se puede aludir a más de un constructo.

La falta de consenso en cuanto a la definición ha originado una amplia variedad de instrumentos que presentan diferencias en las dimensiones que evalúan, según la definición de *sentido numérico* considerada por cada autor. El análisis de dichos instrumentos nos lleva a concluir que, mientras que proliferan los instrumentos centrados en la evaluación del sentido numérico temprano, fundamentalmente para edades comprendidas entre 3 y 8 años, son mucho menos numerosos los instrumentos existentes para la evaluación del denominado *sentido numérico maduro*.

También se observa que todos los instrumentos analizados se acercan a la evaluación del sentido numérico desde un enfoque cuantitativo. Sin embargo, dado que hay consenso en considerar el sentido numérico como algo fácilmente observable, es decir, resulta evidente cuando en una persona se denota su desarrollo, parece razonable abordar en trabajos futuros instrumentos que traten de evaluarlo desde un enfoque cualitativo.

5. Referencias

Adamuz-Povedano, N. y Bracho-López, R. (2019). Desarrollo del sentido numérico. En: García-Pérez, M. T. y Adamuz-Povedano, N. (eds.). *Del número al sentido numérico y de las cuentas al cálculo táctico* (pp. 13-30). Octaedro.

Andrews, P. y Sayers, J. (2015). Identifying Opportunities for Grade One Children to Acquire Foundational Number Sense: Developing a Framework for Cross Cultural Classroom Analyses. *Early Childhood Education Journal*, *43*(4), 257-267. https://doi.org/10.1007/s10643-014-0653-6

Araujo, A. M., Ruiz, G., Aguilar, M., Aragón, E. L. y Navarro, J. I. (2013). «Early Mathematical Competence Test-R»: una herramienta multimedia para la evaluación del aprendizaje matemático temprano / «Early Mathematical Competence Test-R»: A Multimedia Tool for Assessing the Early Mathematical Competence. *Revista Internacional de Tecnología, Ciencia y Sociedad*, *2*(2). https://doi.org/10.37467/gka-revtechno.v2.1279

Aunio, P. (2019). Early Numeracy Skills Learning and Learning Difficulties–Evidence-based Assessment and Interventions. En: Geary, D. C., Berch, B. y Mann Koepke, K. (eds.). *Cognitive Foundations for Improving Mathematical Learning* (vol. 5, pp. 195-214). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815952-1.00008-6

Benvenuto, G. y González, I. (2017). Evaluación de la matemática temprana mediante la primera validación italiana del Early Numeracy Test-Revised (ENT-R). *ECPS - Educational, Cultural and Psychological Studies*, *1*(15), 127-142. https://doi.org/10.7358/ecps-2017-015-gonz
Berch, D. B. (2005). Making Sense of Number Sense: Implications for Children With Mathematical Disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *38*(4), 333-339.
Castro, E. y Segovia, I. (2015). Sentido numérico. En: Flores, P. y Rico, L. (coords.). *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 109-126). Pirámide.
Clements, D. H., Sarama, J. H. y Liu, X. H. (2008). Development of a measure of early mathematics achievement using the Rasch model: The Research-Based Early Maths Assessment. *Educational Psychology*, *28*(4), 457-482. https://doi.org/10.1080/01443410701777272
Dantzig, T. (1954). *Number: The language of science*. MacMillan.
Dehaene, S. (2001). Precis of The Number Sense. *Mind and Language*, *16*(1), 16-36. https://doi.org/10.1111/1468-0017.00154
Dehaene, S. (2011). *The number sense: How the mind creates mathematics*. Oxford University Press.
Dunphy, E. (2006). The development of young children's number sense through participation in sociocultural activity: Profiles of two children. *European Early Childhood Education Research Journal*, *14*(1), 57-76. https://doi.org/10.1080/13502930685209811
Foegen, A., Jiban, C. y Deno, S. (2007). Progress Monitoring Measures in Mathematics. *The Journal of Special Education*, *41*(2), 121-139. https://doi.org/10.1177/00224669070410020101
Geary, D. C., Bailey, D. H. y Hoard, M. K. (2009). Predicting Mathematical Achievement and Mathematical Learning Disability with a Simple Screening Tool. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *27*(3), 265-279. https://doi.org/10.1177/0734282908330592
Geary, D. C., Berch, D. B. y Koepke, K. M. (2015). *Evolutionary Origins and Early Development of Number Processing*. Academic Press.
Ginsburg, H. P. y Baroody, A. J. (2003). *Test of Early Mathematics Ability* [3.ª ed.]. Pro-Ed.
Güven, G. (2019). Developing preschool activities to support children's cognitive skills and examining their effectiveness. *Universal Journal of Educational Research*, *7*(4), 909-922. https://doi.org/10.13189/ujer.2019.070401
Halberda, J. y Feigenson, L. (2008). Developmental change in the acuity of the «number sense»: The approximate number system in 3-, 4-,

5-, and 6-year-olds and adults. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1457-1465. https://doi.org/10.1037/a0012682

Howell, S. C. y Kemp, C. (2005). Defining Early Number Sense: A participatory Australian study. *Educational Psychology*, *25*(5), 555-571. https://doi.org/10.1080/01443410500046838

Howell, S. C. y Kemp, C. R. (2010). Assessing preschool number sense: skills demonstrated by children prior to school entry. *Educational Psychology*, *30*(4), 411-429. https://doi.org/10.1080/01443411003695410

Jordan, N. C., Glutting, J. J. y Dyson, N. (2012). *Number Sense Screener ™ (NSS ™) User' s Guide, K - 1, Research Edition*. Brookes.

Jordan, N. C., Glutting, J. y Ramineni, C. (2008). A Number Sense Assessment Tool for Identifying Children at Risk for Mathematical Difficulties. En: *Mathematical Difficulties* (pp. 45-58). Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-012373629-1.50005-8

Jordan, N. C., Glutting, J. y Ramineni, C. (2010). The importance of number sense to mathematics achievement in first and third grades. *Learning and Individual Differences*, *20*(2), 82-88. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2009.07.004

Jordan, N. C., Kaplan, D., Ramineni, C. y Locuniak, M. N. (2009). Early math matters: Kindergarten number competence and later mathematics outcomes. *Developmental Psychology*, *45*(3), 850-867. https://doi.org/10.1037/a0014939

Lago, R. M. y DiPerna, J. C. (2010). Number sense in kindergarten: A factor-analytic study of the construct. *School Psychology Review*, *39*(2), 164-180.

Li, M. N. F. y Yang, D.-C. (2010). Development and Validation of a Computer-Administered Number Sense Scale for Fifth-Grade Children in Taiwan. *School Science and Mathematics*, *110*(4), 220-230. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2010.00024.x

Libertus, M. E. y Brannon, E. M. (2009). Behavioral and Neural Basis of Number Sense in Infancy. *Current Directions in Psychological Science*, *18*(6), 346-351. https://doi.org/10.1111/j.1467-8721.2009.01665.x

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En: Flores, P. y Rico, L. (eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Pirámide.

Markovits, Z. y Sowder, J. (1994). Developing Number Sense: An Intervention Study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(1), 4-29.

McIntosh, A., Reys, B. J. y Reys, R. E. (1992). A Proposed Framework for Examining Basic Number Sense. *For the Learning of Mathematics*, *12*(3), 2-8.

National Mathematics Advisory Panel (2008). Foundations for Success: The Final Report of the National Mathematics Advisory Panel. En: *Education Publications Center, U.S. Department of Education*. http://edr.sagepub.com/content/37/9/645.full

Okamoto, Y. y Case, R. (1996). Exploring the microstructure of children's central conceptual structures in the domain of number. *Monographs of the Society for Research in Child Development*, *61*(1-2), 27-58. https://doi.org/10.1111/j.1540-5834.1996.tb00536.x

Purpura, D. J. y Lonigan, C. J. (2015). Early Numeracy Assessment: The Development of the Preschool Early Numeracy Scales. *Early Education and Development*, *26*(2), 286-313. https://doi.org/10.1080/10409289.2015.991084

Purpura, D. J., Reid, E. E., Eiland, M. D. y Baroody, A. J. (2015). Using a brief preschool early numeracy skills screener to identify young children with mathematics difficulties. *School Psychology Review*, *44*(1), 41-59. https://doi.org/10.17105/SPR44-1.41-59

Reys, R., Reys, B., Emanuelsson, G., Johansson, B., McIntosh, A. y Yang, D. C. (1999). Assessing Number Sense of Students in Australia, Sweden, Taiwan, and the United States. *School Science and Mathematics*, *99*(2), 61-70. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.1999.tb17449.x

Reys, R. y Yang, D. C. (1998). Relationship between computational performance and number sense among sixth and eighth grade students in Taiwan. *Journal for Research in Matematics Education*, *29*(2), 225-237.

Rico, L. (2005). La alfabetización matemática y el proyecto PISA de la OCDE en España. *Revista de Madres y Padres Del Alumnado*, *82*(abril), 1-13.

Sowder, J. (1992). Estimation and Number Sense. En: Grouws, D. A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-389). National Council of Teachers of Mathematics.

Starkey, P., Klein, A. y Wakeley, A. (2004). Enhancing young children's mathematical knowledge through a pre-kindergarten mathematics intervention. *Early Childhood Research Quarterly*, *19*(1), 99-120. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2004.01.002

Van de Rijt, B. A. M., Van Luit, J. E. H. y Pennings, A. H. (1999). The construction of the utrecht early mathematical competence scales. *Educational and Psychological Measurement*, *59*(2), 289-309.

Whitacre, I., Henning, B. y Atabaş, S. (2020). Disentangling the Research Literature on Number Sense: Three Constructs, One Name. *Review of Educational Research*, *90*(1), 95-134. https://doi.org/10.3102/0034654319899706

Wright, R. J., Martland, J. y Stafford, A. K. (2006). *Early Numeracy. Assessment for Teaching & Intervention*. Sage.

Yang, D. C. y Jan, H. J. (2019). The study of primary school teachers' performance on number sense. *International Journal of Information and Education Technology*, *9*(5), 342-349. https://doi.org/10.18178/ijiet.2019.9.5.1224

Yang, D. C., Li, M. y Li, W. J. (2008). Development of a computerized number sense scale for 3rd graders: Reliability and validity analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *3*(2), 110-124.

3

Consideración de errores y dificultades en propuestas didácticas diseñadas por maestros en formación

Consideration of errors and difficulties in teaching proposals designed by preservice primary teachers

Carmen Gloria Aguayo-Arriagada,[1] Lina María Cecilia Gámiz[2]
y Ana B. Montoro[2]
[1]Universidad de Almería, [2]Universidad de Granada

Resumen
A pesar de las diferencias existentes entre los distintos modelos de conocimiento del profesor desarrollados desde la Didáctica de la Matemática, en todos ellos se destaca la importancia de conocer posibles errores y dificultades en contenidos matemáticos para diseñar propuestas de enseñanza que permitan superar dichos obstáculos. En este capítulo exploramos el sentido que dan estudiantes para maestro de Primaria a las nociones de *error* y *dificultad*, examinando en qué medida y de qué modo son tomados en cuenta en el diseño de unidades didácticas. El estudio nos aporta información sobre el grado en que son capaces de integrar lo aprendido, apreciándose que en general toman en cuenta las limitaciones de aprendizaje en la elaboración de la programación, si bien suelen aplicar un tratamiento superficial al reflejarlas en el planteamiento de las actividades.

Palabras clave: formación de maestros, errores y dificultades, unidades didácticas, educación matemática, educación primaria

Abstract
Despite the differences among different models of teacher knowledge developed from the Didactics of Mathematics, all of them highlight the importance of knowing possible errors and difficulties in mathematical content when designing teaching proposals that allow overcoming these obstacles. In this chapter we explore the meaning of the terms error and difficulty given by

preservice primary school teachers, examining to what extent and in what way they are considered in the planning of teaching units. The study provides us with information on the extent to which preservice teachers are capable of integrating what they have learned. In general, they take into account the learning limitations while designing teaching proposals, although they tend to make a superficial application of them on task planning.

Keywords: teacher training, errors and difficulties, learning proposals, mathematics education, primary education

1. Introducción

Existe un consenso generalizado en la comunidad de educadores matemáticos sobre la importancia de considerar los errores y dificultades en el aprendizaje de los estudiantes como parte integrante y relevante del proceso educativo, si bien se han adoptado perspectivas diferentes en su concepción y tratamiento, bajo la influencia de enfoques teóricos diversos (Rico, 1998; Flores, 2001). Asimismo, en los distintos modelos de conocimiento del profesor desarrollados desde la Didáctica de la Matemática se destaca, salvando las diferencias entre ellos, la relevancia de conocer posibles errores y dificultades en contenidos matemáticos para diseñar propuestas de enseñanza que permitan superar tales obstáculos (Ball *et al.*, 2008; Carrillo-Yáñez *et al.*, 2018).

El estudio que presentamos se encuadra en una investigación más amplia que analiza el diseño de unidades didácticas por parte de un grupo de maestros y maestras en formación, cuyo punto de partida es una tesis doctoral (Aguayo-Arriagada, 2018) de la que derivan trabajos posteriores que inciden en determinados aspectos de la planificación, como los objetivos de aprendizaje (Aguayo-Arriagada *et al.*, 2018) o la fenomenología de los problemas planteados (Aguayo-Arriagada y Flores, 2020). Nos proponemos ahora indagar en los trabajos realizados por los estudiantes para profundizar en el sentido que los futuros profesores atribuyen a los errores y dificultades en el momento de programar la práctica docente. Pretendemos, de este modo, valorar la efectividad de la enseñanza recibida y de las herramientas de planificación aportadas, así como las posibles carencias que puedan ponerse de manifiesto, en lo que se refiere al foco de interés de los errores y dificultades en matemáticas.

2. La formación de profesores de matemáticas en la Universidad de Granada

Nuestro trabajo se enmarca en la formación inicial de profesores de matemáticas y se contextualiza en el Grado de Educación Primaria de la Universidad de Granada, en el que el Departamento de Didáctica de la Matemática se hace cargo de las materias propias del área. Es necesario mencionar que, durante muchos años, los doctores Pablo Flores e Isidoro Segovia han venido desempeñando un papel protagonista en este departamento, realizando aportaciones muy valiosas tanto en docencia como en investigación. Una muestra de ello son los manuales que sirven de base a las asignaturas y que apoyan la tarea docente del profesorado, en los que ellos han participado como coordinadores y/o coautores (Segovia y Rico, 2011; Flores y Rico, 2015; Castro, 2001), y que son relevantes para esta investigación, porque marcan las pautas de enseñanza y evaluación en los aspectos que se analizan.

Por otro lado, cabe destacar las numerosas tesis dirigidas por ellos, de las que varias se enmarcan en la línea de Formación del profesorado de matemáticas y han abordado de algún modo la evaluación de las materias que conforman el programa destinado a los futuros maestros y maestras de Primaria. Entre ellas se encuentran las tesis doctorales de dos de las autoras de este capítulo, una de ellas centrada en la asignatura de primer curso (Cecilia, 2016) y otra en la correspondiente al tercer curso (Aguayo-Arrriagada, 2018), siendo esta última tesis precursora del presente trabajo.

El modelo formativo que sustenta este trabajo es el propuesto por el grupo de investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», al que pertenecen los profesores mencionados. Para preparar a los futuros docentes, nos situamos en un enfoque funcional de las matemáticas escolares apoyado en el constructivismo social como teoría de aprendizaje (Lupiáñez y Rico, 2015), así como en un enfoque funcional de la propia formación inicial de los maestros (Gómez y González, 2008). El planteamiento metodológico que se promueve en las materias correspondientes al área de Didáctica de la Matemática se fundamenta en el análisis didáctico (Rico *et al.*, 2013) como instrumento de formación del profesorado de matemáticas, si bien este planteamiento coexiste en la misma universidad con otras posturas teóricas (Godino *et al.*, 2007).

En cuanto a la distribución de las asignaturas en el programa formativo, en el primer año de carrera se imparte Bases Matemáticas para la Educación Primaria, donde se enfatiza en el contenido matemático. En el segundo año se continúa con Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Primaria, siendo aquí donde se profundiza en los aspectos cognitivos, relacionados con el aprendizaje de las matemáticas y sus dificultades y errores. Finalmente, en el tercer año se aborda Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en la Educación Primaria, donde los futuros maestros integran los elementos estudiados en los años anteriores en el diseño de unidades didácticas sobre un determinado contenido matemático, que realizan de manera grupal. La investigación realizada se centra en analizar unidades didácticas elaboradas por estudiantes en esta última asignatura.

3. El papel de los errores y dificultades en la formación de maestros de Educación Primaria

El marco conceptual que debemos considerar atiende tanto a los errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas como a su relación con la formación inicial de profesores y específicamente con la competencia de planificación de los estudiantes para maestro, particularizada en la integración de errores y dificultades en el diseño de unidades didácticas.

3.1. Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas

En el aprendizaje de las matemáticas se presentan diversas dificultades de procedencia y naturaleza variada que dan lugar a errores en la comprensión y en las producciones de los alumnos (Rico, 2001).

En matemáticas las dificultades de aprendizaje apuntan a enunciados generales que se van puntualizando de distintas formas sobre los temas de estudio (González *et al.*, 2010). Existen diferentes tipos de dificultades que han sido clasificadas por los expertos. Atendiendo a su origen, pueden estar asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de pensamiento matemático, a los procesos de enseñanza, a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos o a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas. Todas estas dificultades se manifiestan en los alumnos en forma de errores (Socas, 1997).

En palabras de Lupiáñez y Rico (2015), el error:

> [...] es un dato empírico que muestra un desconocimiento o un conocimiento inadecuado sobre un contenido que tiene un alumno o un grupo de alumnos (p. 54)

Por tanto, es una conducta observable que puede aportar información sobre las dificultades que han podido provocarlo. Por otro lado, el conocer dificultades de aprendizaje permite apreciar e interpretar los errores, que son manifestaciones más concretas que se producen en las respuestas que dan los alumnos a las tareas (Rico, 1998).

Centrándonos en las dificultades debidas a la complejidad de los conceptos matemáticos, la experiencia muestra que algunos de ellos suelen resultar más difíciles de comprender o requieren más tiempo para su asimilación. La investigación ha generado un amplio conocimiento sobre los errores más frecuentes relativos a algunos conceptos básicos que conviene tener en cuenta en la planificación de la enseñanza, incluyendo actividades mediante las que detectarlos, controlarlos y corregirlos (Lupiáñez y Rico, 2015).

En todo planteamiento de enseñanza subyace una concepción de aprendizaje que influye en la interpretación que se hace del error. Desde el punto de vista del conductismo, hay que evitar los errores, puesto que no permiten desarrollar la conducta deseada, y habrá que poner los medios para prevenirlos o corregirlos. Sin embargo, cuando se concibe el aprendizaje como un cambio de estructuras, los errores de los aprendices son indicadores de la forma en que han comprendido la tarea, es decir, son muestras externas de la estructura mental que se ha formado el alumno que los comete (Flores, 2001). Desde esta última perspectiva, defendida por las teorías cognitivas, se asigna una función didáctica al error, que juega un papel importante en el aprendizaje y debe ser considerado en la planificación, en la evaluación y también como motivación y como medio para mejorar la comprensión (Rico, 2001).

3.2. Dificultades y errores en la formación inicial de profesores de matemáticas

Los expertos distinguen dos componentes fundamentales que caracterizan el conocimiento del profesor de matemáticas: el conocimiento del contenido matemático escolar y el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, tal como los denomina Rico (2015). Ambas componentes se interrelacionan en los diferentes elementos que conforman lo que un futuro docente necesita saber para enseñar matemáticas. Así, el modo en que se contemplan los errores y dificultades en la formación inicial de profesores de matemáticas y, en particular, de los maestros y maestras de Primaria, debe abarcar conocimientos de aprendizaje y enseñanza para utilizarlos de manera adecuada en la planificación, desarrollo y evaluación de la acción didáctica, pero también se requiere que el estudiante para maestro acredite un dominio suficiente de su conocimiento sobre el contenido matemático, de modo que él mismo pueda enfrentarse con éxito a las principales dificultades y errores de las matemáticas elementales.

En lo que se refiere al conocimiento didáctico, de valor incuestionable para la capacitación de los futuros docentes es la previsión y el tratamiento de dificultades y errores de aprendizaje. Como exponen Fernández-Plaza *et al.* (2019), hay marcos recientes centrados en competencias profesionales del profesor que propugnan la relevancia de que se fomente el desarrollo de una competencia específica centrada en la consideración de errores en los programas de formación de profesores, aunando diversos aspectos dentro de ella. En este sentido, Heinrichs y Kaiser (2018) concretan la competencia de diagnóstico del profesor para tratar errores que pueden presentar los escolares cuando están aprendiendo matemáticas estableciendo dos capacidades distintas: detectar las razones por las cuales se comete el error y desarrollar estrategias para gestionarlos.

Algunas investigaciones se han preocupado por detectar en qué errores inciden los maestros en formación, obteniendo información sobre el conocimiento del contenido matemático de los estudiantes y sus posibles carencias (De Castro *et al.*, 2004; Rodríguez *et al.*, 2016). Otros estudios abordan la competencia de diagnóstico, centrándose en si los futuros profesores pueden identificar errores de escolares y cómo lo hacen (Fernández-Plaza *et al.*, 2019; Şahin *et al.*, 2016). Nuestro trabajo incide en la dimensión de planificación, analizando el papel de los errores y dificultades con relación a esta competencia.

3.3. Integración de errores y dificultades en la planificación de la enseñanza

Si percibimos la formación inicial desde una perspectiva funcional, es decir, integrando el conocimiento, habilidades y actitudes de los estudiantes para maestro en la acción que se lleva a cabo en el contexto de aprendizaje de las matemáticas en las aulas de Educación Primaria, el conocimiento de los futuros maestros se puede desarrollar a partir del análisis y la descripción de las actividades necesarias para planificar, gestionar y evaluar una lección de matemática (Gómez y González, 2008). Según Rico (2015), la planificación requiere delimitar y precisar los contenidos y sus significados, prever el tipo de aprendizaje que se quiere alcanzar, diseñar un plan de actuación para el logro de los aprendizajes esperados y establecer un sistema de evaluación sobre el alcance de dichos logros. Por consiguiente, el conocimiento didáctico sobre un contenido escolar consta de estos cuatro elementos, que pueden ser organizados mediante el enfoque del análisis didáctico (Rico *et al.*, 2013), en el que nos posicionamos.

El análisis didáctico, que constituye tanto una herramienta para la planificación como un modelo de formación, propugna que los dominios de conocimiento matemático y conocimiento didáctico están estrechamente vinculados y se ponen en juego al desarrollar cada una de las dimensiones que contempla: análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación. Estas dimensiones permiten al profesor organizar su actividad de enseñanza sobre un tema matemático, facilitándole, así, el diseño de unidades didácticas. El análisis de contenido conforma la revisión y organización de los conceptos y procedimientos de un contenido matemático escolar, el modo en que se pueden representar y la organización de los fenómenos y problemas a los que puede dar respuesta. El análisis cognitivo se centra en el aprendizaje de un tema matemático y sirve para concretar las expectativas sobre ese aprendizaje, las limitaciones que pueden interferir en él y las tareas que se puedan considerar como generadoras de oportunidades de aprendizaje. El análisis de instrucción es el momento en el que el profesor selecciona, diseña y secuencia las tareas que se llevarán a cabo, delimitando también los materiales y recursos, así como la gestión del aula, todo esto concretado en la programación. Finalmente, el análisis de evaluación se lleva a cabo una vez se implemente la unidad didáctica, pudiendo obtener información para generar modificaciones en ella (Aguayo-Arriagada, 2018).

En lo que concierne a este trabajo, en un primer momento interesa profundizar en la fase del análisis cognitivo, que es donde los errores y dificultades juegan un papel relevante para la planificación posterior. En esta fase se establecen, una vez realizado el análisis de contenido, las expectativas que el profesor se plantea respecto al aprendizaje de los alumnos, pero también se han de tener en cuenta las posibles *limitaciones de aprendizaje,* es decir, aquellas situaciones que pueden limitar o entorpecer el aprendizaje de los alumnos al trabajar con el contenido matemático en cuestión. Estas limitaciones se concretan en las posibles dificultades que pueden surgir y qué errores pueden ocasionar. A partir de aquí comienza el proceso de búsqueda o de creación de tareas que constituyan oportunidades de aprendizaje, en coherencia con las expectativas planteadas y considerando errores y dificultades frecuentes para ayudar a superarlos.

En la siguiente fase, el análisis de instrucción, es donde se integran las limitaciones de aprendizaje que los alumnos han buscado y seleccionado para diseñar la propuesta didáctica, teniendo en cuenta esta información para programar de manera coherente y eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje, de modo que pueda contribuir a salvar esas limitaciones mediante una adecuada secuencia de tareas.

En definitiva, el conocimiento de errores y dificultades forma parte del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y han de ser considerados en la planificación de diferentes maneras, como apuntan Lupiáñez y Rico (2015):

> El estudio de los errores y dificultades proporciona esquemas para organizar los contenidos. Una determinada secuencia de tareas puede facilitar la superación de dificultades o evitar errores específicos. También la selección de una forma de representación o de un ejemplo concreto puede contribuir a superar esas limitaciones.
>
> También el estudio de errores ayuda a establecer objetivos, en cuanto que estos marcan algunas limitaciones que deben superarse mediante una organización correcta de contenidos. Igualmente, el conocimiento de los errores y las dificultades proporciona orientaciones para diseñar situaciones que planteen conflictos cognitivos a los alumnos, que les exijan revisar sus conocimientos previos y superar las limitaciones conceptuales. (p. 55)

4. Consideración de errores y dificultades en unidades didácticas diseñadas por estudiantes

Como avanzábamos anteriormente, nos proponemos explorar el sentido y uso que dan estudiantes para maestro de Primaria a los errores y dificultades como organizadores de la enseñanza, concretándose el objetivo de la investigación en describir en qué medida y de qué modo son tomadas en cuenta las limitaciones de aprendizaje en la planificación de unidades didácticas por parte de los futuros profesores.

4.1. Metodología de la investigación

Este estudio es de carácter exploratorio, cualitativo y descriptivo, y usa el análisis de contenido para examinar los trabajos escritos del alumnado.

Sujetos de estudio

El estudio se realizó en una clase con 71 estudiantes matriculados en la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria, a los que se propuso trabajar en equipo, quedando conformados 18 grupos, 17 de cuatro integrantes cada uno y uno de tres. En la primera clase se proponía a cada grupo un contenido matemático y el nivel educativo en el que debían plantearlo, para que posteriormente en las clases prácticas fueran trabajando el análisis didáctico (contenido y cognitivo) del tema asignado. El trabajo final consistía en la planificación de una unidad didáctica, donde se les pedía que, de los análisis de contenido y cognitivo trabajados previamente, seleccionaran contenidos, objetivos y limitaciones concretos para afrontar el diseño de la unidad didáctica de su tema en el nivel que les correspondía. Teniendo definidos estos elementos, se dedicaban a la selección de materiales didácticos y tareas matemáticas para elaborar cada una de las sesiones de su unidad didáctica.

El sentido multiplicativo es fuente de errores frecuentes en el alumnado de Primaria (Alsina *et al.*, 1996), debido al grado de abstracción y complejidad que supone para estas edades. En particular, hay acuerdo en afirmar que la división implica mayores dificultades frente al resto de las operaciones básicas, lo cual conlleva una variedad de errores en los escolares (Anghileri, 2001). Por este motivo, para este estudio decidimos escoger aquellos grupos que centraron las unidades didácticas en la división de números naturales, conformando una muestra intencional y por disponibilidad.

Los seis grupos de estudiantes seleccionados como muestra, identificados con los códigos G1 a G6, diseñaron sus propuestas didácticas en diferentes cursos de Educación Primaria, abarcando los tres ciclos: dos grupos (G1 y G2) trabajaron la iniciación a la división en segundo curso, dos grupos (G3 y G4) plantearon su unidad didáctica en tercero, un grupo (G5) en cuarto y otro (G6) en quinto curso.

Variables de análisis

Siguiendo las fases del análisis didáctico, los estudiantes deben hacer un análisis de contenido del tema matemático asignado antes de diseñar su programación. Luego deben desarrollar el análisis cognitivo investigando, entre otras cosas, cuáles son las dificultades y errores que pueden presentarse en el proceso de enseñanza-aprendizaje, para lo que pueden utilizar fuentes sugeridas o hacer una búsqueda autónoma de información. Por último, con el análisis de instrucción plantean la unidad didáctica considerando los análisis anteriores.

Teniendo en cuenta el proceso descrito, distinguimos dos dimensiones secuenciales que se refieren a las dos fases en las que el alumnado maneja el conocimiento sobre errores y dificultades: análisis cognitivo y análisis de instrucción. Puesto que nuestro interés se centra en analizar las producciones finales, es decir, las unidades didácticas ya elaboradas, en la primera dimensión nos limitamos a hacer una comparación entre el análisis cognitivo que realizaron en un trabajo anterior y el modo en que lo integran en la planificación de la unidad didáctica propiamente dicha, con objeto de observar si hacen cambios o progresan de algún modo en el proceso de elaboración.

Respecto a la segunda dimensión, para evaluar la presencia y tratamiento de las limitaciones de aprendizaje en las programaciones realizadas construimos una serie de variables a modo de ítems que aplicamos a cada uno de los trabajos. Excepto una, todas las variables son dicotómicas, si bien en algunas de ellas se matizan después cualitativamente las diferencias entre las respuestas. Tanto las variables como la interpretación de las categorías asociadas (cumplimiento o no cumplimiento del ítem, excepto la segunda, que tiene sus propias categorías) se definieron por triangulación de investigadoras, estableciéndose tal como a continuación se describen:

- Variable «Error vs. dificultad». Consideramos que los estudiantes cumplen con este ítem si hacen algún tipo de distinción entre dificultades y errores cuando incluyen el listado de limitaciones de aprendizaje referentes a los contenidos trabajados en la unidad didáctica, sin hacer juicio de valor sobre si la distinción es más o menos acertada, aunque en el momento de analizar cada trabajo se matizan algunos detalles.
- Variable «Fuentes». Observamos si para elaborar el listado de errores y dificultades utilizan las fuentes bibliográficas sugeridas por el profesor o bien hacen una búsqueda autónoma, usualmente a través de Internet, y seleccionan otras fuentes, tomando así contacto con artículos de investigación u otro tipo de publicaciones. En este caso, se sugirió como fuente principal de información el manual usado como guía de la asignatura, concretamente, el capítulo de Flores *et al.* (2015). Las tres categorías definidas para esta variable se han denominado como sigue: «Recomendadas», «Internet», «Recomendadas e Internet», en alusión a las fuentes utilizadas.

- Variable «Contenido y nivel educativo». Otro aspecto que se analizó de las producciones fue la relación con los contenidos y con el curso asignado. Se observó si la selección de limitaciones de aprendizaje era acorde a los conceptos y procedimientos del contenido trabajado (*división*), así como al nivel educativo que le correspondía a cada grupo, considerando que el ítem se cumplía cuando se satisfacían de manera aceptable estas dos condiciones. No obstante, se han hecho comentarios cuando se ha visto la necesidad de precisar estos aspectos.
- Variable «Sesiones». Con esta variable pretendemos identificar si los grupos contemplan las limitaciones de aprendizaje de manera explícita en la secuencia de tareas, es decir, para valorar su cumplimiento nos limitamos a constatar si seleccionan y describen algunas de las dificultades y errores para cada una de las sesiones de la unidad didáctica. Con todo, vemos conveniente analizar si establecen implícitamente esa relación entre las limitaciones y las tareas que proponen, observando si de algún modo se refleja la intención de trabajarlas en el desarrollo de la sesión.
- Variable «Justificación». Por último, apreciamos si en las conclusiones de los trabajos escritos se justifica la relevancia y el tratamiento que dan a los errores y dificultades en el diseño de la unidad didáctica. Se considera que se cumple este ítem cuando aluden de algún modo a esa justificación, independiente de la profundidad de sus comentarios, aunque realizamos matizaciones en caso necesario.

Utilizando estas variables como criterios, los documentos fueron analizados de manera independiente por las tres autoras del artículo, discutiendo los resultados en aquellos casos en los que hubo desacuerdos y llegando a un consenso final.

4.2. Resultados

Al comparar la unidad didáctica con el análisis cognitivo previo, se puede observar que los grupos G1, G3, G4, y G5 no hacen cambios, presentando las mismas dificultades y errores en ambos trabajos. En cambio, el grupo G2 presenta una tabla bastante amplia sobre diferentes dificultades y errores asociados a la división en el análisis cognitivo y en la unidad didáctica hace una selección de las relacionadas con su nivel educativo. El grupo G6 es el que presenta cambios más significativos, incluyendo en la unidad didáctica, además de los errores propuestos en el primer trabajo, dificultades, distinguiendo entre ambos aspectos.

Centrándonos en el análisis del trabajo final (unidad didáctica), encontramos que todos los grupos relacionan adecuadamente las dificultades y errores propuestos con los contenidos que pretenden trabajar en el nivel educativo asignado. El único caso en el que se puede apreciar que algunas de las dificultades y errores no se corresponden con lo que se trabaja en el curso es el del grupo G2, ya que establecen como dificultad la concepción de que el dividendo es siempre mayor que el divisor, aspecto que no aparece hasta introducir la división con decimales. Así lo subraya este grupo:

> Dificultades:
> Diferente papel que desempeñan los términos *dividendo* y *divisor* de las operaciones de la división. (L1)
>
> Errores:
> Los alumnos memorizan que el dividendo siempre es el número mayor y el dividendo el número menor.

En contraste, ninguno de los grupos al inicio de cada sesión hace una selección entre sus dificultades y/o errores para poder abordarlos con las tareas planteadas. Se centran en mencionar solamente los contenidos, los objetivos específicos y los materiales o recursos necesarios. No obstante, cuando se analizan las tareas de cada sesión, en ocasiones se aprecia que sí contemplan de algún modo las limitaciones de aprendizaje. Todos los grupos inician algunas de sus sesiones proponiendo actividades con material manipulativo, lo que favorece que los escolares entiendan los significados de la división o comprendan el mecanismo del algoritmo, permitiendo superar algunas dificultades y evitar errores asociados a ellas. Una muestra de esto se puede apreciar cuando el grupo G6, en la primera sesión de su unidad didáctica, pide a los alumnos que resuelvan un problema utilizando el material multibase, planteándolo de la siguiente manera:

Una vez que saben representar los números vamos a plantear lo siguiente utilizando el material multibase en grupos de 4:

– Una floristería quiere hacer ramos de una docena de rosas con 252 rosas que tiene en la tienda. ¿Cuántos ramos de rosas harán? ¿Sobran rosas?

Sin embargo, en pocas ocasiones se observa de manera clara y explícita la intención de crear conflicto cognitivo, por ejemplo, para incidir sobre algún error frecuente de los que incluyen en su análisis cognitivo.

En el resto de las variables a analizar, se pueden observar diferencias más significativas entre los grupos, existiendo una mayor variabilidad en el cumplimiento de los ítems (tabla 1). Comentaremos los resultados obtenidos para cada uno de los grupos de trabajo.

Tabla 1. Resultados de las variables por grupo.

Grupos/ Variables	Error vs. dificultad	Fuentes	Justificación
G1	Sí	Recomendadas e Internet	Sí
G2	Sí	Recomendadas e Internet	Sí
G3	Sí	Recomendadas	Sí
G4	Sí	Recomendadas e Internet	
G5		Recomendadas	
G6	Sí	Internet	

En el caso del grupo G1, encontramos que diferencian entre dificultades y errores, pero se centran más en explicar la dificultad que en delimitar los errores específicos que están asociados a dicha dificultad. Por ejemplo, en un caso mencionan como error:

> El alumno presenta dificultades para asociar el concepto de *mitad* con la división entre 2.

En esta situación, podemos observar que se utiliza el término *dificultad*, pero aluden a errores. Un aspecto a destacar de este grupo es que, para cada dificultad y error, incluye un ejemplo

(«Ejemplo: un alumno sabe repartir 8 lápices entre 2 estuches, pero no sabe que esto es la mitad»). Se basan tanto en las dificultades señaladas en el libro de texto recomendado como en otras fuentes de Internet. Finalmente, en las conclusiones justifican exclusivamente las dificultades asociadas al lenguaje matemático, diciendo que utilizan «un lenguaje sencillo y entendible para que no los lleve a error».

El grupo G2 presenta una tabla de limitaciones, diferenciando entre dificultades y errores. Al igual que el grupo G1, todo lo que se expone es extraído del libro de texto sugerido. En las conclusiones justifican que las dificultades y errores son tomados en cuenta, pero no se refieren a ninguno de ellos ni explican cómo se han abordado, indicando que «cada una de las tareas que hemos propuesto se ha realizado para superar las limitaciones y errores que puedan tener los alumnos y alumnas a estas edades y en este tema».

El grupo G3 establece la diferenciación entre dificultades y errores y, si bien se inspiran en el libro de texto, consultan, además, otras fuentes, agregando dificultades más específicas para su contenido y nivel educativo, como son: dificultad al introducir el nuevo procedimiento, dificultad en la realización del algoritmo de la caja, dificultad de comprensión e identificación de los términos y dificultad en el verbo de acción para realizar la operación. También hacen alusión a algunos errores asociados a cada una de las dificultades; por ejemplo, relacionan el «Error en la realización de la operación de derecha a izquierda (tanto en el cociente como en el divisor)» con dificultades en la realización del algoritmo de la caja. En las conclusiones vuelven a mencionar las dificultades y luego afirman:

> Nuestra unidad es adecuada, ya que presenta gran coherencia entre los objetivos, los contenidos, las dificultades, las representaciones y las tareas.

El grupo G4 organiza las dificultades en dos categorías, relativas a la división y relativas a la resolución de problemas, diferenciando las dificultades y errores para cada una de ellas. Aunque extraen información del libro de texto, añaden una clasificación bastante detallada de las dificultades, tanto para la división como para los problemas, asociando para cada una de estas un error y ampliando la información del manual mediante la consulta de otras fuentes de Internet. Este grupo no hace ningún tipo de justificación de sus dificultades y errores en las conclusiones.

Dificultad:
1. Dificultad de comprensión lectora matemática.

Error:
El principal error a destacar es que el verbo *repartir* se convierte en un referente de la división que no siempre corresponde.

El grupo G5 comienza mencionando que «lo primero que tenemos que diferenciar es el concepto de *error* con el de *dificultad*». Sin embargo, presentan un listado de dificultades con la clasificación propuesta en el manual recomendado sin hacer alusión a errores, por lo cual reflejan la diferencia más de nombre que de concepto. No se hace ningún tipo de justificación de las dificultades planteadas.

3. c) Dificultades relacionadas con la enseñanza.
   - Los alumnos son capaces de memorizar fácilmente el algoritmo de la división, pero no llegan a comprender el significado de dicho procedimiento ni a identificar los problemas los cuales se han de resolver mediante dicho algoritmo.
   - Confundir problemas multiplicativos con problemas aditivos.
   - Considerar que la cantidad que aparece en el cociente corresponde a toda la cantidad del divisor, no a cada unidad del divisor.

Finalmente, el grupo G6 hace la distinción entre dificultades y errores de aprendizaje, pero no asocia cada uno de los errores a una dificultad específica, es decir, presenta ambas como elementos independientes. Las dificultades están más relacionadas con la resolución de problemas:

La dificultad de elegir la operación adecuada para resolver un problema simple de división varía de una categoría semántica a otra.

Por su parte, los errores son específicos del algoritmo de la división:

Dejar restos intermedios iguales o mayores que el divisor y omitir ceros en el cociente.

En la tabla 1 podemos observar que este es el único grupo que no utiliza la fuente recomendada. Al igual que los dos grupos anteriores, tampoco justifica el tratamiento de dificultades y errores en las conclusiones de su trabajo.

5. Discusión y reflexiones finales

La comparación entre el análisis cognitivo previo y el trabajo final, primera dimensión considerada en el estudio, muestra que solo dos grupos logran generar cambios a lo largo del proceso formativo, apreciándose una preocupación por delimitar en la unidad didáctica cuáles eran las dificultades y errores que tomarían en cuenta específicamente para el desarrollo de sus sesiones. Esto indica que aplican adecuadamente las herramientas aportadas por el profesorado para llevar a cabo su unidad didáctica, siendo conscientes de que la planificación es un proceso complejo que incluye varios aspectos y fases que deben ser consideradas.

Respecto a la segunda dimensión, relativa al análisis de instrucción, las observaciones realizadas muestran que la mayoría de los grupos integran los errores y dificultades en diferentes partes de la unidad didáctica, si bien se aprecia un tratamiento no explícito, superficial o no siempre adecuado en el momento de plantear las tareas para el alumnado. La experiencia en la formación inicial de maestros permite constatar que incluso algunos de ellos no han llegado a dominar por completo ciertos aspectos del sentido multiplicativo y de la división, tal como se detecta en alguno de los trabajos analizados, y esto puede influir en que no les resulte fácil integrar los errores y dificultades en las tareas de un modo consciente y en profundidad.

Casi todos los grupos (cinco de seis) hacen la distinción entre dificultades y errores, situación que favorece a los futuros maestros a la hora de planificar. Tener claridad sobre limitaciones de aprendizaje permite hacer una planificación más cuidadosa para afrontarlas en la enseñanza.

Poder establecer cuáles son las dificultades y errores que pueden surgir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de un contenido matemático específico conlleva que los futuros maestros tengan un acercamiento a investigaciones sobre matemática y su didáctica. En general, los grupos se basan en el libro de texto de referencia para elaborar su listado de limitaciones de aprendizaje, pero también acuden a otras fuentes, realizando una búsqueda autónoma. No obstante, hemos apreciado que no siempre elaboran de manera personal la información buscada.

La relación que se establece entre el contenido trabajado en la unidad didáctica y los errores y dificultades planteados para los diferentes niveles educativos podríamos decir que, en general, es coherente. Sin embargo, no se detecta claramente la conexión entre las limitaciones de aprendizaje y la secuencia de tareas programadas, ya que ninguno de los grupos hace mención en el inicio de cada sesión de las dificultades y errores concretas que se podrían abordar en ella. Un factor que ha podido influir en este hecho es que no se les demandaba explícitamente que asociaran las limitaciones a cada una de las tareas, siendo ellos los que debían tomar decisiones al respecto.

En cambio, al analizar las tareas propuestas, hemos visto que algunas sí se relacionan con las dificultades y errores en cierta medida, aunque no con la profundidad que sería deseable. Si bien es cierto que los grupos hacen uso de material manipulativo para facilitar el aprendizaje y ayudar a la superación de dificultades, no tienen en cuenta otros aspectos importantes que podrían enriquecer las tareas en ese sentido, como el planteamiento de conflictos cognitivos que presten atención a los errores más frecuentes, tal como sugieren Lupiáñez y Rico (2015).

Finalmente, un aspecto que nos interesaba analizar era la capacidad de los futuros maestros de justificar el porqué y para qué de las dificultades y errores considerados en su programación. Hemos podido observar que la mitad de los grupos hacían alusión a este aspecto en las conclusiones, si bien argumentaban de manera muy general la forma en la que habían contemplado las limitaciones de aprendizaje, o simplemente aludían a ellas.

A modo de reflexión, la consideración de estos aspectos para analizar los trabajos de los estudiantes nos da pistas sobre el grado de comprensión y de aplicación que muestran sobre dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas a la hora de programar la acción didáctica. Conscientes de la complejidad que supone este tema para la mayoría de ellos, sobre todo por la profundización requerida en la conceptualización de las propias matemáticas, pero también por la necesidad de dominar planteamientos didácticos que promuevan realmente la significatividad de lo aprendido, la información que obtenemos mediante el análisis de las unidades didácticas realizadas creemos que resulta útil para modificar y enriquecer la formación inicial de los futuros docentes, teniendo en cuenta las limitaciones observadas. Es decir, partiendo de los criterios que, como formadores de profesores, utilizamos para dar valor a sus competencias de planificación, podemos detectar posibles carencias, dificultades de comprensión, creencias erróneas, confusiones u omisiones relacionadas, en este caso, con la consideración de dificultades y errores en el aprendizaje matemático, para así poder reconducir y mejorar nuestra propia práctica docente. De algún modo, este estudio muestra coherencia con la exigencia que, a los estudiantes, a su vez, se les plantea para desempeñar su futura profesión con calidad: «es importante considerar los posibles errores y dificultades de los alumnos ante el aprendizaje para poder planificar la enseñanza de manera más efectiva».

Creemos que una contribución añadida de este estudio ha sido la necesidad de organizar y delimitar el tópico de errores y dificultades dentro del programa completo de formación de los futuros docentes, explicitando y haciendo hincapié en las relaciones que se establecen entre las asignaturas de los diferentes cursos. Esto nos ha llevado a reflexionar sobre la importancia de la coordinación entre el profesorado, tanto en el aspecto trabajado como en otros, para asegurar un tratamiento global, secuenciado y coherente de las competencias a desarrollar a lo largo de la formación universitaria.

6. Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado con el apoyo del proyecto PGC2018-095765-B-I00 del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España.

7. Referencias

Aguayo-Arriagada, C. G. (2018). *El análisis didáctico en la formación inicial de maestros de primaria* [tesis doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Aguayo-Arriagada, C. G y Flores, P. (2020). Fenomenología de los problemas de división que proponen futuros maestros de Primaria. En: Castro-Rodríguez, E., Castro, E., Flores, P. y Segovia, S. (coords.). *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Enrique Castro* (pp. 41-60). Pirámide.

Aguayo-Arriagada, C. G., Flores, P. y Moreno, A. (2018). Concepto de objetivo de una tarea matemática de futuros maestros. *Bolema*, *32*(62), 990-1011.

Alsina, C., Burgués, C., Fortuny, J. M., Giménez, J. y Torra, M. (1996). *Enseñar matemáticas*. Graó.

Anghileri, J. (2001). Development of division strategies for year 5 pupils in ten English schools. *British Educational Research Journal*, *27*(1), 85-103.

Ball, D. L., Thames, M. H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Carrillo-Yáñez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowlegde (MTSK) model. *Research in Mathematics Educaction*, *20*(3), 236-253.

Castro, E. (ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Síntesis.

Cecilia, L. M. (2016). *Calidad y competencias en la formación inicial de profesores: evaluación de un programa de Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. [tesis doctoral]. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2004). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: Estudio con maestros en formación. En: Castro, E. y De la Torre, E. (eds.) *Actas del VIII Simposio de la SEIEM* (pp. 183-194). Universidad da Coruña.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Castro-Rodríguez, E., Segovia, I., Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2019). Identificación de errores escolares en matemáticas por maestros en formación. En: Marbán, J. M., Arce, M., Maroto, A., Muñoz-Escolano, J. M. y Alsina,

Á. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. inicial-final). SEIEM.
Flores, P. (2001). Aprendizaje y evaluación. En: Castro, E. (ed.). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 41-59). Síntesis.
Flores, P. y Rico, L. (coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Pirámide.
Flores, P., Castro-Rodríguez, E. y Fernández-Plaza, J. A. (2015). Enseñanza y aprendizaje de las estructuras aritméticas. En: Flores, P. y Rico, L. (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 205-230). Pirámide.
Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The international Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.
Gómez, P. y González, M. J. (2008). *Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training*. Comunicación presentada en el Topic Study Group 27 del ICME 11.
González, M. J., Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2010). *Análisis cognitivo. Apuntes de MAD*. [documento no publicado]. Universidad de los Andes.
Heinrichs, H. y Kaiser, G. (2018). Diagnostic competence for dealing with students' errors: Fostering diagnostic competence in error situations. En: Leuders, T., Phillipp, K. y Leuders, J. (eds.). *Diagnostic competence of mathematics teachers* (pp. 79-94). Springer.
Lupiáñez, J. L y Rico, L. (2015). Aprender las matemáticas escolares. En: Flores, P. y Rico, L. (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 41-60). Pirámide.
Rico, L. (1998). Errores en el aprendizaje de las matemáticas. En: Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (eds.). *Educación matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Una empresa docente.
Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En: Castro, E. (ed.). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Síntesis.
Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática.* Comares.
Rodríguez, M. M., Sánchez, A. B. y López, R. (2016). Caracterización de la estructura de las sustracciones en las que estudiantes universitarios cometen errores. En: Macías, J. A., Jiménez, A, González, J. L., Sánchez, M. T., Hernández, P., Fernández, C, Ruiz, F. J., Fernández, T. y Berciano, A. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (p. 635). SEIEM.

Şahin, O., Gökkurt, B. y Soylu, Y. (2016). Examining prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge on fractions in terms of students' mistakes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(4), 531-551.

Segovia, I. y Rico, L. (coords.) (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Pirámide.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En: Rico, L. (coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-15). Horsori.

4

Análisis del método UCMAS para el desarrollo del cálculo mental

Analysis of UCMAS method for mental calculus

María C. Cañadas y María D. Torres
Universidad de Granada

Resumen
El método UCMAS (*Universal Concept of Mental Arithmetic System*) tiene como uno de sus fines el desarrollo del cálculo mental en los niños. Comienza con el uso del ábaco soroban. Su objetivo principal es el desarrollo intelectual a través de la estimulación del cerebro en los niños de 5 a 13 años. UCMAS se usa en diferentes países. Se conoce en España desde hace pocos años. En este trabajo describimos su origen, sus principales características, el ábaco soroban, los fundamentos matemáticos sobre los que se basa y algunas actividades. Finalmente, usamos un análisis DAFO del método UCMAS, que muestra información útil para la investigación y la docencia.

Palabras clave: ábaco soroban, cálculo mental, métodos de cálculo, UCMAS

Abstract
The UCMAS (Universal Concept of Mental Arithmetic System) has as one of its main aime the development of children' mental calculus. It starts with the use of Soroban abacus. Its main objective is the intellectual development through the stimulation of the students' brain. The method is recommended for children between 5 and 13 years old. UCMAS is used in different countries. It is known in Spain since a few years. In this work we describe its origin, its main characteristics, the soroban abacus, the mathematical foundation in which it is based on, and some activities. Finally, we use SWOT analysis to identify strengths, weaknesses, opportunities, and threats related to UCMAS method, which shows useful information for research and teaching practices.

Keywords: calculation methods, mental calculation, soroban abacus, UCMAS

1. Introducción

El cálculo mental hace referencia al desarrollo de operaciones matemáticas sin el uso de recursos o materiales diferentes al cerebro. Por tanto, no se pueden usar calculadoras, ni lápiz y papel, ni siquiera otras partes del cuerpo como los dedos para realizar cálculos. También se concibe como aquellos procedimientos mentales diferentes de los algoritmos usuales, utilizados para llevar a cabo operaciones aritméticas rápidas y exactas (Mochón y Vázquez, 1998). Por ello, el cálculo mental permite explorar y descubrir distintas formas de operar con los números.

Diferentes autores destacan la importancia de trabajar el cálculo mental desde las primeras edades. Esto lleva a los niños a alcanzar un sentido numérico que les permite afrontar, entender, analizar y resolver problemas que se les presentan cotidianamente (Fernández, 2018). En el currículo, el cálculo mental se recoge como una de las habilidades que debe adquirir el alumno de Educación Primaria para desarrollar un razonamiento lógico que le permita resolver problemas y operaciones aritméticas de una forma más precisa (Cantón y Mochón, 2003).

A pesar de lo anterior, el cálculo mental en la escuela, en la mayoría de los casos, no se ejercita o no se hace lo suficiente (Gómez, 1989; Mochón y Vázquez, 1995). En los últimos años, se están introduciendo diferentes métodos en las aulas de matemáticas en las primeras edades en España, con la intención del fomentar el cálculo mental. Uno de ellos es el método UCMAS (*Universal Concept of Mental Arithmetic System*), en el que se instruye a los niños en el uso del ábaco soroban a través de diversas actividades programadas. En este método se comienza con el uso de un material, el ábaco soroban, pero, de forma gradual, se va abandonando su uso para la realización de operaciones matemáticas.

Como investigadoras y docentes en Didáctica de la Matemática, entre otras tareas, tenemos la responsabilidad de la formación de maestros de Educación Primaria. Nos asaltan numerosas y variadas preguntas sobre este método. Destacamos algunas: ¿es beneficioso este método?, ¿es beneficioso para todos los niños?, ¿fomenta el cálculo mental en detrimento de otras habilidades matemáticas?, ¿para quiénes?, ¿cómo y cuándo se debe usar?, ¿hay casos o situaciones en los que no se recomiende?, etc. Algunas de estas cuestiones están abordadas por los propios promotores del método o directores de centros donde se trabaja con él. En cambio, no hemos encontrado resultados de investigación independientes que den cuenta del método. En este trabajo hacemos una primera aproximación al método UCMAS, mediante una descripción detallada y un análisis DAFO de este.

2. El método UCMAS

El programa UCMAS lo inició Dino Wong en 1993. La intención fue estimular la actividad cerebral de los niños a través del uso del ábaco soroban y el juego. Según se recoge en la web de UCMAS-España (http://www.ucmas.es/phone/el-programa.html), actualmente más de un millón de alumnos trabajan con él, y se imparte en más de 5000 centros educativos de 49 países distribuidos por Europa, Norteamérica, África y Asia.

En España se establece este método entre los años 2006-2007, con el objetivo de dar respuesta a la búsqueda y formación en modelos educativos alternativos y que ayudaran a mitigar algunas dificultades con el cálculo mental. El método se usa en España a través de dos modalidades diferentes: como actividad extraescolar o como implementación en el currículo del colegio. Actualmente, más de 10.000 alumnos cursan el programa en los mejores centros de enseñanza del país.

2.1. Características generales

Las siglas UCMAS proceden de *Universal Concept of Mental Arithmetic System*, cuya traducción al castellano es *concepto universal del sistema de aritmética mental*. El método consiste en:

> [...] el uso de una metodología determinada a través del ábaco y unos recursos didácticos particulares, que generan un modelo innovador y de gran eficacia que forma al individuo en habilidades y capacidades, mejorando así el proceso de enseñanza-aprendizaje. (Claret, 2012)

El uso del ábaco soroban y la posición y el movimiento coordinado de los dedos de ambas manos son partes esenciales del método. Dado que cada uno de nuestros hemisferios controla la actividad de nuestra mano contraria, este método favorece el equilibrio entre los dos hemisferios del cerebro (Claret, 2012).

Esto es especialmente importante si tenemos en cuenta que parecen existir dos modos de pensar, el verbal y el no verbal, representados por el hemisferio izquierdo y el derecho, respectivamente. Dado que se suele priorizar la forma verbal, en particular en occidente, este método favorecería el equilibrio entre ambos hemisferios. Nuestro hemisferio izquierdo controla la capacidad de representar los números con palabras y de realizar operaciones aritméticas mentalmente (Sperry, 1973).

Para realizar cálculos con el método UCMAS, no es necesario representar números con palabras. Calcular significa visualizar mentalmente imágenes de cuentas o bolitas en el ábaco soroban. Los niños que aprenden a utilizar el ábaco soroban generan en sus mentes una representación visual de esos números. Por tanto, trabajan con representaciones no verbales de los números (Barner y Frank, 2011). Los niños que aprenden a calcular con un ábaco relacionan que el número tres no es solamente la cifra 3 o la palabra tres escrita en un papel, sino que esa cifra tiene una posición determinada en una columna del ábaco.

En este sentido, los defensores del método UCMAS consideran que se trata de un programa de desarrollo intelectual integral que activa las áreas cerebrales relacionadas con la memoria espacial, la sensibilidad artística, la capacidad de concentración entre otros.

La edad recomendada para este método es el intervalo 5-13 años. Esta recomendación se basa en dos argumentos. Desde el punto de vista fisiológico por ser la etapa de mayor plasticidad en el cerebro. El tejido neuronal se desarrolla en los niños desde los 4-6 años y este proceso se mantiene activo hasta los 12 años, momento en el que el desarrollo de los tejidos nerviosos alcanza el 75 % (Healy, 1991). Desde el punto de vista cognitivo, un niño con menos de 5 años es posible que aún no identifique los números. En cambio, un niño de mayor edad no puede incorporar al concepto del pensamiento solo imágenes, porque ya está acostumbrado a pensar de manera tradicional.

Como hemos indicado, en el método se usa el ábaco soroban, que describimos a continuación.

2.2. El ábaco soroban

El ábaco soroban es un ábaco de origen japonés compuesto por varillas verticales y en cada varilla cinco cuentas. Estas cuentas están separadas por una barra central horizontal, quedando en la parte superior una cuenta. Las cuentas de la parte superior se llaman de cielo y su valor es de 5 unidades. En la parte inferior están las cuatro cuentas de tierra, cada una con valor de una unidad en la posición de las unidades. En la figura 1 mostramos el ábaco soroban y sus diferentes partes.

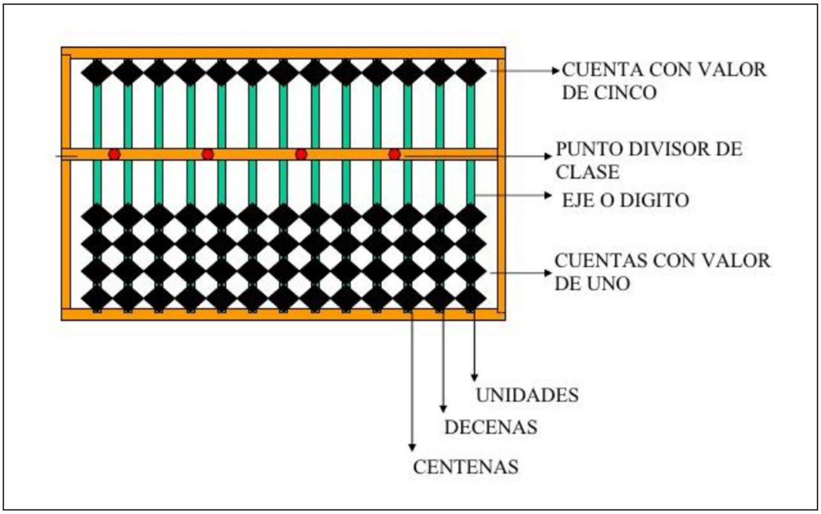


Figura 1. Partes del ábaco soroban. Fuente: Vega y Carranza (2016).

Las cuentas de este ábaco adquieren valor cuando se acercan a la barra central y pierden su valor cuando se alejan de ella. En el ábaco de la figura 1, como todas las cuentas están alejadas de la barra central, está representando el número cero.

En el método UCMAS se trabaja con números y las fórmulas[1] se basan en las reglas y axiomas matemáticos tradicionales en el

1. El método UCMAS se compone de 34 fórmulas que mediante distintas operaciones aritméticas se realizan con el ábaco (figura 3).

sistema decimal de numeración indoarábigo (el habitual en la cultura occidental). Se asocia un número a ciertas cuentas y a una posición de estas en el ábaco, la noción de *adición* con «poner cuentas» y la de *sustracción* con «quitar cuentas», por poner algunos ejemplos.

El manejo del ábaco es muy importante, porque se les enseña a operar a través de él. De hecho, se suelen realizar ejercicios de dedos y se establecen una serie de pasos en el uso del ábaco soroban en el método UCMAS.

El primer paso es limpiar el ábaco, que significa dejarlo a cero. Para ello, se sujeta el ábaco y se levanta unos 45 grados. Después, se levantan todas las cuentas inferiores deben deslizarse hacia la base del ábaco (figura 2).

A continuación, se apoya el ábaco sobre la mesa de forma horizontal y con el dedo índice derecho se levantan todas las cuentas superiores. La dirección es de izquierda a derecha y con el dedo índice derecho se levantan todas las cuentas superiores o cuentas de cielo.

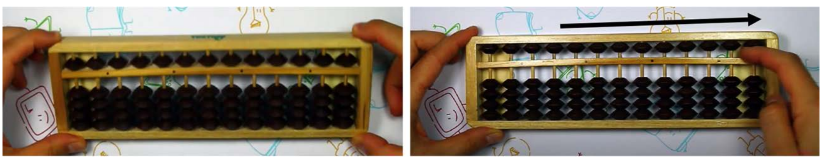


Figura 2. Movimiento del ábaco para ponerlo a cero. Fuente: Biedma (2014).

Este paso hay que repetirlo cada vez que empecemos una nueva operación.

Tipos de movimientos

Hay diferentes tipos en función de los números implicados en las operaciones. Para los números 1, 2, 3, 4 y 5, realizamos un solo movimiento, para la suma se hará subiendo la ficha o grupo de cuentas con el dedo pulgar y el movimiento de restar se hará bajando la ficha o grupo de cuentas con el dedo índice.

Para 6, 7, 8 y 9, el ejercicio es diferente, pues se requiere el movimiento simultáneo de 2 o más cuentas. A este movimiento se lo llama PINCH cuando sumamos, y SPLIT cuando restamos. En la tabla 1 mostramos un ejemplo de los movimientos que hay que realizar, por ejemplo, para el número 6.

Tabla 1. Ejemplos de movimientos.

Operación	Movimiento de los dedos
+6	Subir con el dedo pulgar derecho 1 ficha y bajar la ficha5 con el índice derecho simultáneamente.
–6	Bajar con el dedo pulgar derecho 1 ficha y subir la ficha5 con el índice derecho simultáneamente.

El ábaco solo se sujeta con una mano. Los dedos pulgar, anular y meñique sujetan el ábaco y el índice y medio se utilizan para manipular las cuentas, haciendo la forma de las orejas de un conejo.

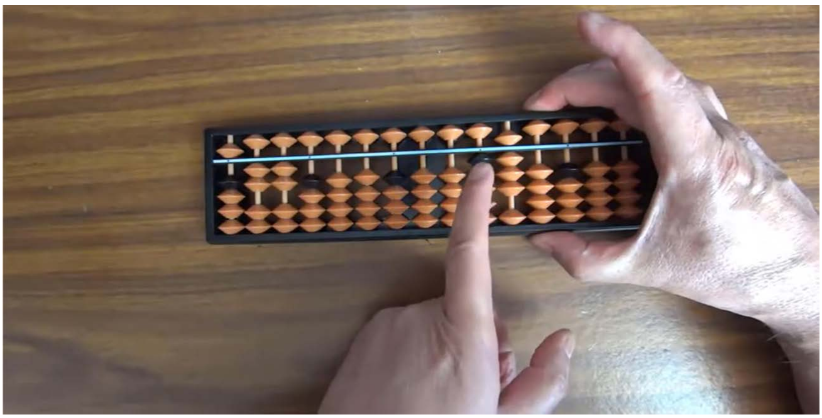


Figura 3. Posición de los dedos para sujetar el ábaco.

La sujeción del lápiz es importante para el correcto manejo del ábaco. Si los niños son diestros o zurdos, el método UCMAS indica diferentes posiciones.

2.3. Fundamentos matemáticos

El método UCMAS tiene 32 fórmulas que los niños van aprendiendo progresivamente. Hasta que no las conozcan todas, no podrán trabajar solos. (http://es.scribd.com/doc/96714959/UCMAS-1). Se distinguen tres tipos de fórmulas: *a*) amigos pequeños, *b*) amigos grandes y *c*) combinaciones. Las parejas de amigos pequeños están formadas por parejas cuya suma de ambos números es igual a cinco. Las parejas de amigos grandes están formadas por dos números cuya suma es 10. Se dice que el mejor amigo de los amigos grandes es el número 10. Las combinaciones combinan una pareja de amigos pequeños con otra de amigos grandes.

En la figura 4 se observan las 34 fórmulas. Las flechas indican el sentido en el que hay que desplazar la ficha en el ábaco.

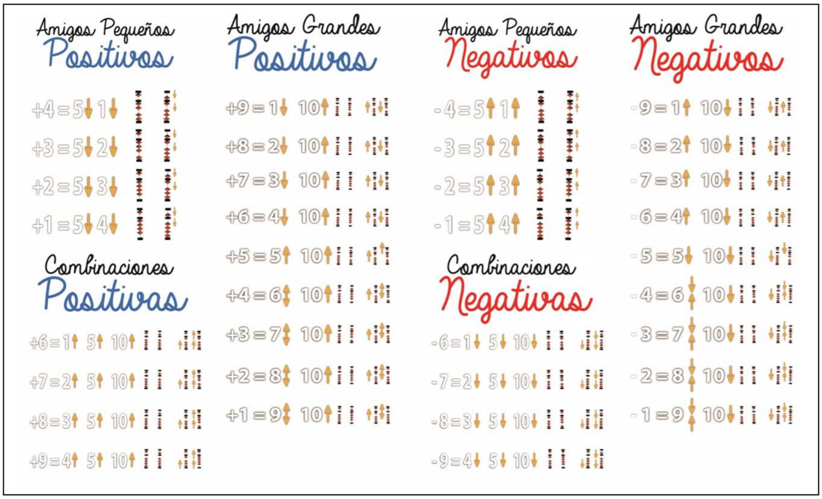


Figura 4. Fórmulas (UCMAS España SL). Fuente: http://ucmas.es/materiales/otros/LISTA%20FORMULAS%20BASIC.pdf.

Dependiendo de la suma o resta, el alumno tiene que elegir una fórmula de estos grupos siguiendo una jerarquía predeterminada.

En las primeras edades del uso del método UCMAS (5-7 años aproximadamente), el aprendizaje de las fórmulas tiene de apoyo imágenes del ábaco acompañadas de flechas y se incluye el símbolo de suma o resta. Así pueden aprender el «movimiento» de una fórmula con las flechas y el símbolo matemático de la operación como ayuda (figura 4). Por ejemplo, para + 4 = + 5 – 1, el movimiento correspondiente del movimiento sería: + 4 = 5 ↓ 1 ↓Operación: + 4 = + 5 – 1.

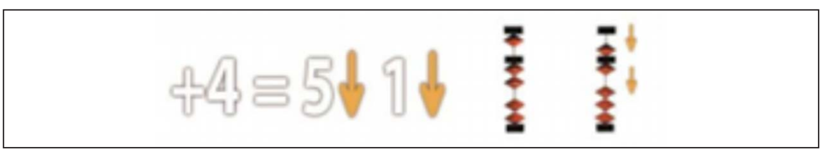


Figura 5. Fórmulas con flechas.

La suma en un libro de texto UCMAS no se expresa de la forma tradicional. Una operación se representa de la siguiente manera: el niño visualiza los tres números a la vez y posteriormente sigue el procedimiento UCMAS (observar, elegir fórmula y calcular) para llegar al resultado (Claret, 2012).

2.4. Actividades

El trabajo con el método UCMAS incluye de juegos variados y dinámicos. Describimos a continuación algunos de ellos. Comenzamos por los que fomentan la atención, la concentración, la memoria visual y espacial.

- *Speed writing*[2] es un juego de concentración en el que hay que escribir el mayor número de parejas de amigos pequeños o grandes en un minuto.
- En *short term memory* se dicen en voz alta cinco números a los niños, cambiando la velocidad al decirlos y el intervalo de tiempo entre ellos. Después los tienen que escribir. Se va aumentando la cantidad de números. Este juego se puede hacer con tarjetas de imágenes.
- Para el juego del teléfono árabe, se divide la clase en dos equipos y el profesor propone una operación a un miembro de cada equipo. Este miembro hace la operación mentalmente con su ábaco imaginario y a continuación le dice la operación a su compañero de al lado, quien debe resolver y seguir la cadena. Y así sucesivamente hasta llegar al último miembro del equipo, quien deberá decir en voz alta la operación y su resultado.
- En el juego del fotógrafo, todos los alumnos se colocan en grupo, como si les fueran hacer una foto. Uno de ellos será el fotógrafo, quien tendrá que observar en un tiempo concreto todos los detalles de la foto imaginaria que ha realizado. A continuación, se marcha de la clase y el grupo cambiará de posición e introducirán elementos nuevos. El fotógrafo deberá averiguar qué ha cambiado con respecto a la foto original (Claret, 2012).

2. Mantenemos la terminología en inglés porque en España se usa así en las actividades a las que hemos tenido acceso.

Otros juegos se centran más en favorecer la memoria visual y auditiva.

- Las *flash cards* son tarjetas con la imagen de un número por una cara, y la imagen de ese mismo número representado en el ábaco soroban en la otra cara. El objetivo es averiguar el número viendo la imagen del ábaco.
- En los *mentals*, los niños pasan de usar el ábaco físicamente a usarlo de forma imaginaria, mediante una imagen mental del mismo. Primero usarán los dedos como apoyo, aunque ya sin el ábaco. Progresivamente, dejarán de usar los dedos. Se considera un momento clave en el método.

Para que el trabajo realizado sea eficiente, es necesario que: *a*) la práctica sea constante, y *b*) que se practique en casa, además de en el colegio. En este sentido, se requiere el apoyo de las familias de los niños que trabajen con este método en los centros educativos (Claret, 2012).

3. Análisis DAFO del método UCMAS

El análisis DAFO responde a las siglas de Debilidades, Amenazas, Fortalezas y Oportunidades. Es una técnica de análisis que procede del ámbito empresarial facilitando el proceso de planificación estratégica, proporcionando la información necesaria para la implementación de acciones y medidas correctivas, y para el desarrollo de proyectos de mejora (Díaz y Matamoros, 2011; Gürel, 2017).

La técnica DAFO consta de las siguientes fases: *a*) planteamiento, que consiste en definir y distinguir claramente los conceptos de *debilidad*, *fortaleza*, *amenaza* y *oportunidad*; *b*) análisis, tanto interno, nuestras debilidades y fortalezas, como externo, las amenazas y las oportunidades del entorno; y *c*) finalmente, se expresan los resultados realizando un vaciado de los datos en una tabla y se formulan las estrategias o propuestas de mejora (Moral, Arrabal y González, 2010).

Esta técnica se ha extrapolado desde el ámbito empresarial al educativo, donde se ha usado en diferentes contextos. Se emplea para evaluar programas, situaciones, actuaciones, experiencias, cursos, etc., con el objetivo de realizar un análisis en profundidad, detectar necesidades, buscar estrategias y realizar propuestas de mejora (Moral *et al.*, 2010).

Para el análisis DAFO a menudo se organizan los datos en una tabla o matriz de 2 × 2 (figura 6). Esta matriz representa las categorías internas y externas. La idea es tomar una visión holística de las cuatro categorías, aunque para fines prácticos, cada uno puede desglosarse por separado (Leigh, 2006).

Internas	Fortalezas a. b. c.	Debilidades a. b. c.
Externas	Oportunidades a. b. c.	Amenazas a. b. c.

Figura 6. Matriz de 2 por 2 del análisis DAFO (Leigh, 2006).

La técnica DAFO se desarrolla mediante cuestiones que persiguen diagnosticar la situación presente, proyectar situaciones futuras y prever acciones posibles considerando los condicionantes tanto en positivo como en negativo que rodea la temática a abordar. Se concreta en preguntas que corresponden a criterios internos (fortalezas y debilidades) y externos (oportunidades y amenazas) (Colás y De Pablos, 2004). Describimos estos cuatro elementos con el método que nos ocupa.

3.1. Fortalezas

Las fortalezas son características del método para las que es especialmente útil y que, de algún modo, distinguen a este método de otros. Deben ser características claras que las tenga este método y no otros. Para que sea una fortaleza, debe sobresalir sobre los demás (MindTools, s. f.)

Identificamos las siguientes fortalezas en el empleo del método UCMAS.

- Se pueden representar números y realizar las operaciones aritméticas elementales (adición, sustracción, multiplicación y división).

- Se fomenta la atención, la concentración, la memoria visual y espacial.
- Hay actividades y juegos variados, para trabajar individual y grupalmente.

3.2. Debilidades

Las debilidades son características que hacen que otros métodos sean más útiles que este en algún sentido. Se debe pensar en elementos que se pudieran mejorar o prácticas que pudieras ser más efectivas o eficientes si se desarrollaran de otro modo (MindTools, s. f.).

A continuación, describimos las debilidades identificadas en el método UCMAS:

- Podría confundir al niño si se combina con otros métodos para el aprendizaje de las operaciones aritméticas básicas.
- Es difícil acceder al material. En la mayoría de los casos, no es de acceso abierto.
- Se necesitan recursos para que cada niño tenga un ábaco soroban.
- Se necesita la práctica en casa y no todas las familias han de tener los conocimientos necesarios.

3.3. Oportunidades

Las oportunidades recogen ocasiones o casos en los que el material se podría mejorar y para lo que hay que trabajar y hacer transformaciones. Pueden derivarse de situaciones educativas y docentes que se prevean con su uso para el presente o el futuro. Se pueden proponer teniendo en mente los cambios sociales, los perfiles del alumnado y las costumbres (MindTools, s. f.).

Planteamos las siguientes oportunidades para el método UCMAS:

- Dar acceso gratuito a los materiales del método.
- Plantear una formación de las familias para que puedan apoyar a los niños que usen el método UCMAS.
- Diseñar e implementar formación de maestros en este método para que puedan usarlo en las aulas o a través de actividades extraescolares.

3.4. Amenazas

Las amenazas incluyen cualquier aspecto que pueda afectar negativamente al uso del método por cuestiones externas como, por ejemplo, problemas económicos o requerimientos educativos, entre otros. Se pueden tener en cuenta obstáculos externos que puedan influir en que no se use el método. Conocer otros métodos y analizar en qué sentido que puede mejorar este puede ser útil también (MindTools, s. f.).

Percibimos las siguientes amenazas en el método UCMAS:

- No se usa la tecnología.
- En algunos países, el ábaco soroban no se usa habitualmente en los centros educativos.
- Las demandas curriculares no dejan mucho margen de tiempo para utilizar métodos diferentes de los tradicionales que, al menos inicialmente, requiere una inversión de tiempo.
- Se requiere que los maestros o maestras que vayan a trabajar matemáticas con los niños desde los 5 a los 13 años conozcan y empleen el método. Esto implica a maestros de Educación Infantil, de Educación Primaria y profesores de matemáticas de Educación Secundaria.

4. Conclusiones

En este trabajo hemos descrito el método UCMAS y hemos planteado las debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades que observamos desde nuestro conocimiento del método y de la situación educativa en España.

En primer lugar, destacamos que la búsqueda de referencias para la realización de este trabajo ha dado pocos resultados, a pesar de contar con los recursos disponibles en la Biblioteca de la Universidad de Granada y de ser conocedoras de diferentes bases de datos especializadas. En diferentes momentos durante el avance de este trabajo, nos hemos encontrado con la imposibilidad de acceder a diferentes documentos en acceso abierto.

El método UCMAS se propone para implementarlo con niños de 5-13 años. En el caso de España, esto implica que los maestros de Infantil, Primaria y Secundaria deberían ser conocedores de este para implementarlo en sus aulas. Esto es especialmente complicado si se quiere desarrollar en centros educativos públicos, porque los niños de esas edades pasan al menos por dos centros educativos diferentes entre los 5 y los 13 años: uno de Educación Infantil-Primaria (3-12 años) y otro de Educación Secundaria.

Desde el punto de vista de la investigación, creemos que queda trabajo por hacer con relación al método UCMAS. A continuación, perfilamos algunas líneas de trabajo en este sentido. Una primera cuestión general es que no hemos encontrado investigaciones en España que verifiquen las ventajas que los creadores del método o los directores de centros privados donde se imparte le atribuyen a este método. Sería conveniente desarrollar un estudio empírico donde se puedan comparar grupos de niños similares, con un grupo de control y otro experimental.

Como hemos descrito, existen dos modalidades para el uso del método en los centros educativos: como integración en el currículo y como actividad extraescolar. Cabe plantearse si las dos modalidades son igual de eficientes. Creemos necesario indagar sobre las diferencias que se deberían tener en cuenta en ambas modalidades y si en el caso de que se use en actividades extraescolares, cómo se recomienda combinar este trabajo con el que hacen en sus clases habituales de matemáticas.

Otra cuestión que afecta a la práctica docente es la atención a la diversidad. En las aulas ordinarias asisten alumnos muy diversos. ¿Cómo se atiende con este método a las necesidades individuales de cada alumno? ¿Qué ocurre con los que tienen necesidades específicas de apoyo? ¿Y a los que son de alta capacidad o tienen talento matemático?

5. Referencias

Biedma, M. (2014). *Análisis del método UCMAS* [trabajo fin del Grado en Educación Infantil]. Universidad de Granada.

Cantón, R. y Mochón, S. (2003). El soroban como herramienta para desarrollar habilidades del cálculo mental. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 16*(3), 1-6.

Claret, M. (11 de junio de 2012). *UCMAS: concepto y características del método*. Scribd: http://es.scribd.com/doc/96714959/UCMAS-1

Colás, P. y De Pablos, J. (2004). La formación del profesorado basada en redes de aprendizaje virtual: aplicación de la técnica DAFO. *Education in the Knowledge Society, 5*(1). https://doi.org/10.14201/eks.14355

Díaz, A. P. y Matamoros, I. B. (2011). El análisis DAFO y los objetivos estratégicos. *Contribuciones a la economía*. http://www.eumed.net/ce/2011a/domh.htm

Fernández, I. (2018), Competencia en cálculo mental con el Ábaco Japonés. *Números, 99*, 141-152.

Frank, M. C. y Barner, D. (2011). Representing exact number visually using mental abacus. *J. Exp. Psychol. Gen. 141*(1), 134-149. http://doi.org/10.1037/a0024427

Gómez, A. B. (1989). *Numeración y cálculo*. Síntesis.

Gürel, E. (2017). SWOT analysis: A theoretical review. *The Journal of International Social Research, 10*, 994-1006.

Healy, B. (1991). The Yentl syndrome. *The New England Journal of Medicine, 325*(4), 274-276.

Leigh, D. (2006). SWOT analysis. En: Pershing, J. A. (ed.). *Handbook of human performance technology: Principles, practices, and potential* [3.ª ed.] (pp. 1089-1108). Pfeiffer.

MindTools (s. f.). *SWOT analysis how to develop a strategy for success.* https://www.mindtools.com/pages/article/newTMC_05.htm.

Mochón, S. y Vázquez, R. (1995). Cálculo mental y estimación: Métodos, resultados de una investigación y sugerencias para su enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), 93-105.

Mochón, S. y Vázquez, R. (1998). Strategies of mental computation used by elementary and secondary school children. FOCUS on learning problems in mathematics. *Center for Research and Advanced Studies, 20*(1), 35.

Moral, A., Arrabal, J. M. y González, I. (2010). Nuevas experiencias de evaluación estratégica en los centros educativos. La aplicación de una matriz DAFO en el centro de educación infantil y primaria «Mediterráneo» de Córdoba. *Estudios sobre Educación, 18*, 165-200.

Sperry, R. (1973). *Lateral specialization of cerebral function in the surgically separated hemispheres*. Academic Press.

Vázquez, R. (1994). *Una investigación de las estrategias de cálculo mental utilizadas por niños estudiantes de primaria y secundaria* [tesis de maestría]. CINVESTAV México.

Vega, J. C. y Carranza, E. F. (2016). *SOROSUMA: iniciando con el ábaco soroban.* Taller realizado en Encuentro Distrital de Educación Matemática. EDEM.http://www.ucmas.es/phone/el-programa.html, http://ucmas.es/web/index.html

5

Reflexión de futuros profesores de matemáticas sobre las tareas de enseñanza

Reflection of Future Teachers of Mathematics on Teaching Tasks

María Teresa Castellanos Sánchez[1] y Antonio Moreno[2]
[1]Universidad de los Llanos, [2]Universidad de Granada

Resumen
El capítulo estudia la reflexión de futuros profesores de Matemáticas (FPM) durante la realización del Prácticum; se conjetura que el análisis reflexivo posibilita en el FPM transformar los aspectos inconscientes de la enseñanza, en conscientes. A través de un experimento de enseñanza los FPM enfrentan un problema profesional referido a la enseñanza del álgebra, profundizan en dicho problema a través del diseño, implementación y análisis reflexivo de las tareas matemáticas para una clase. Siguiendo el estudio de caso, se examina el proceso formativo y las producciones. Los resultados muestran que las tareas iniciales sufrieron modificaciones y cobraron sentido para la práctica docente producto de los procesos de reflexión. De este modo, los FPM incorporan nuevos elementos a su actuación incrementando en sus conocimientos profesionales.

Palabras clave: formación de profesores, profesor reflexivo, experimento de enseñanza

Abstract
The chapter studies the reflection of Future Teachers of Mathematics (FPM) during the realization of the Practicum; it is conjectured that reflexive analysis makes it possible in the FPM to transform the unconscious aspects of teaching into conscious ones. Through a teaching experiment the FPM face a professional problem related to the teaching of algebra, deepen that problem through the design, implementation and reflective analysis of the mathemati-

cal tasks for a class. Following the case study, the training process and productions are examined. The results show that the initial tasks underwent modifications and made sense for teaching practice as a result of the reflection processes. In this way, the FPM incorporate new elements into their performance by increasing their professional knowledge.

Keywords: teacher training, reflective teacher, teaching experiment

1. Referentes teóricos

La investigación sobre la formación y el aprendizaje de los profesores de Matemáticas ubica la reflexión como uno de los aspectos importantes para aproximar la teoría y la práctica (Kieran *et al.*, 2013); otros investigadores discuten la pertinencia de estos constructos (conocimiento profesional y reflexión) en relación con el desarrollo profesional (Lin y Rowland, 2016) y consideran la reflexión clave para el desarrollo de los sistemas educativos y un desafío para lograr una educación matemática de calidad. De aquí la importancia de promover la reflexión en Futuro Profesor de Matemáticas (FPM) e incorporar conocimiento profesional para otorgar sentido al Prácticum (Blanco-Álvarez y Castellanos, 2017). Nos planteamos, por tanto, el siguiente problema: ¿cómo promover en futuros profesores de Matemáticas procesos de reflexión durante las prácticas? y ¿cómo planean y transforman sus tareas de enseñanza como consecuencia de esta reflexión?

1.1. La reflexión del profesor sobre su práctica

La reflexión docente se considera un elemento fundamental en el desarrollo profesional y un medio para la progresiva comprensión de la práctica. Siguiendo los planteamientos de Schön (1992) y Dewey (1989), se considera que la reflexión implica una representación activa de la realidad, que incluye la mirada retrospectiva sobre las acciones en dichas experiencias, el reconocimiento de las concepciones que en ellas están implicadas y la toma en consideración de las consecuencias de tales acciones, culminando con la exploración de posibles alternativas; El FPM es gestor del proceso de reflexión, quien identifica y asume un problema de la práctica, lo afronta a través de la revisión de sus creencias, para estar en disposición de entenderlo y replantearse alternativas para asumirlo (Flores, 2007). En este sentido, y dado que la única experiencia que tienen los FPM con la enseñanza es la que le proporciona el prácticum, para comprender el proceso de reflexión que revelan los FPM se usa la descripción crítica de la experiencia, haciendo la reconstrucción analítica del proceso formativo en el contexto; se examina la evolución y características de las tareas matemáticas escolares diseñadas e implementadas.

Desde la postura cognitiva, la cual aborda la reflexión como un proceso y un fin, identificamos en varios autores rasgos comunes que permiten caracterizar ese proceso (Dewey, 1989; Schön, 1992; Perrenoud, 2004; Zeichner, 1993; Flores, 2007). Las principales etapas identificadas por los autores mencionados anteriormente son: *a*) problematización de los hechos de la realidad; *b*) distanciamiento de la realidad; *c*) toma de conciencia de los propios y nuevos conceptos, y *d*) las decisiones para la nueva actuación.

La principal característica de la reflexión en todas estas posturas es su fin: en la formación inicial se encamina a la comprensión de la práctica docente (Blanco-Álvarez y Castellanos, 2017). Entendemos los problemas profesionales como las cuestiones que enfrenta el profesor; son origen de cuestionamientos y dilemas de la práctica docente y los focos de reflexión en torno a tareas profesionales; es la dificultad que no puede resolverse automáticamente, sino que requiere de la reflexión para transformar en conscientes, los aspectos inconscientes de la enseñanza (Castellanos *et al.*, 2017).

1.2. Enfoque realista para la formación de profesores

Para abarcar la relación entre conocimiento teórico y práctico, nos posicionamos en la perspectiva formativa del enfoque realista, que promueve la reflexión para acercar dichos campos. Según Melief *et al.* (2010), este modelo de formación permite a los profesores fundamentar los problemas surgidos en la práctica desde la teoría. En este sentido el profesor es generador de situaciones de aprendizaje escolar a partir de la realidad de su práctica. Los principios de este enfoque (tabla 1) apuestan de manera implícita a la reconstrucción del conocimiento profesional.

Tabla 1. Principios de la formación de profesores en el enfoque realista.

Principio 1:	El punto de partida son las cuestiones que emergen de la práctica
Principio 2:	La formación pretende fomentar la reflexión sistemática
Principio 3:	El aprendizaje es un proceso social e interactivo
Principio 4:	Tres niveles en el aprendizaje: representación, esquema y teoría
Principio 5:	Autonomía y construcción de la competencia profesional

Korthagen *et al.* (2001) defienden el aprendizaje reflexivo en la formación de profesores para: *a*) conocer diversas maneras de actuar en la práctica; *b*) saber cuándo, qué y por qué algo es conveniente; y *c*) reflexionar sobre ello sistemáticamente. Desde esta perspectiva, el aprendizaje reflexivo se constituye en el principio general de la formación de profesores, surgido del enfoque realista. A partir de este replanteamiento, las habilidades reflexivas son ahora consideradas como esenciales por su papel en la adquisición de habilidades lectivas y en la reformulación del conocimiento, la práctica y la experiencia humana. La reflexión sistemática se concreta a través de la puesta en marcha de un ciclo de reflexión inscrito en el modelo ALaCT (Korthagen *et al.*, 2001), buscando la alternancia entre «acción» y «reflexión». Su notación se identifica con las siglas de las iniciales de su definición (*Action, Looking back on the action, awareness of essential aspects, Creating alternative methods of action y Trial*). A continuación, describimos las cinco etapas que hemos equiparado con acciones para llevar a cabo la reflexión:

- Acción o experiencia: se identifica y analiza una problemática, exhibiendo los hechos conflictivos y de duda. La fase A se inicia con la descripción y el planteamiento de una situación que problematiza los hechos observados en la práctica; pretende dar sentido al objeto de reflexión concretando en una cuestión.
- Mirar hacia atrás en la acción: consiste en esbozar una «imagen» de los acontecimientos que han dado lugar a la problemática. En la fase L se examinan y exteriorizan creencias, lo cual conduce a la mirada distante de la realidad.

- Conocer puntos importantes o esenciales: tomar conciencia de la acción. En la fase a, se resaltan elementos importantes de la situación que conducen a la concienciación del conocimiento y a profundizar el objeto de la problemática.
- Crear, buscar y preparar alternativas para acción: significa proponer una solución a la problemática, fruto de las fases anteriores. En la fase C se buscan estrategias para reformular el plan de acción para eventos posteriores.
- Comprobar en una nueva situación: aplicar la solución en una nueva situación. En esta fase T se inicia un nuevo ciclo a partir de la aplicación de nuevas alternativas.

1.3. Las tareas matemáticas para la instrucción

Entendemos una tarea como un segmento de actividad de clase que se dedica al desarrollo de un concepto matemático en particular (Stein y Smith, 1998). En tal sentido una tarea podría estar compuesta por varios problemas relacionados (ejercicios o sentencias) o podría ser un solo problema complejo. Las tareas involucran todas las actividades llevadas a cabo por los FPM con escolares para el desarrollo de la lección.

Un aspecto a considerar es el grado en que una tarea es auténtica. Newmann *et al.* (2007) definen una tarea auténtica como aquella que se considera significativa, valiosa, y digna del esfuerzo, es decir, tareas que conectan la lección con el mundo real del escolar y que involucran las preocupaciones del docente; en tal sentido la tarea se entiende como un todo desde el diseño a la implementación y el rediseño. La tarea en sí misma se convierte en problema profesional del FPM, proporcionando oportunidades para desarrollar sus conocimientos matemáticos y didácticos para la enseñanza.

En la literatura se identifican varios aspectos que debe considerar el profesor de Matemáticas al seleccionar, diseñar o modificar tareas. Según Moreno y Ramírez (2016) se atiende a las variables de tarea (contenido, complejidad y situaciones); componentes de la tarea (meta, formulación, temporización) y funciones de la tarea (diagnóstico, auto/regulación, síntesis). Al igual que otros investigadores coincidimos en la necesidad del análisis reflexivo acerca de la formulación de la tarea (Liljedahl *et al.*, 2007); este análisis reflexivo ilumina cualquier rediseño que puede ser beneficioso para las futuras lecciones. El ciclo reflexivo ALaCT ha sido configurado para promover en la formación inicial de profesores de Matemáticas el diseño iterativo de tareas (Castellanos *et al.* 2018, p. 4). De este modo, los FPM: *a*) problematizan hechos de la práctica y diseñan las tareas para abordar la situación problema (fase A); *b*) toman distancia de sus creencias, sometiendo la tarea al juicio (fase L); *c*) toman consciencia de los aspectos relevantes de la aplicación bajo la mirada de expertos (fase a); *d*) establecen decisiones para el rediseño de la tarea, la modifican o ajustan (fase C), y *e*) prueban las alternativas en futuras lecciones (fase T).

2. Metodología de la investigación

Se configura un experimento de enseñanza siguiendo el modelo de Korthagen *et al.* (2001) con el propósito de identificar y describir los aspectos de la reflexión que manifiestan FPM durante el prácticum. Para el desarrollo de esta materia se le pide a los FPM que realicen un análisis didáctico del tema a desarrollar en las aulas de Secundaria. El análisis didáctico es un procedimiento cíclico que describe cómo el profesorado debería idealmente diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje (Rico y Moreno, 2016). A su vez, se puede subdividir en cuatro análisis complementarios: análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación.

Siguiendo el paradigma cualitativo, se procesan los datos del estudio mediante un análisis de contenido. Siguiendo el estudio de caso (Stake, 1998), se examina el proceso formativo y las producciones de Juan, un FPM que ha cubierto las fases del proceso reflexivo y al que denominaremos con este pseudónimo. Juan es un estudiante que se prepara para ser profesor de Secundaria y que está realizando el prácticum del último año de su Licenciatura. Eligió álgebra como unidad didáctica de sus prácticas. Para cada fase del ciclo se espera que el FPM realice unas acciones reflexivas (tabla 2) que son motivadas a partir de unas preguntas orientadoras (Castellanos *et al.*, 2018).

Tabla 2. Acciones reflexivas en fases del ciclo ALaCT.

Fases		Acción reflexiva	Preguntas orientadoras
A	Partir de la acción o experiencia	Problematización. Describir hechos y contexto. Definir la problemática.	¿Cuáles fueron los acontecimientos? ¿Cuál es el contexto del conflicto? ¿Qué inquietud quiero abordar?
L	Mirar hacia atrás en la acción	Distanciamiento. Identificar creencias y examinar los supuestos y fundamentos la problemática.	¿Cuáles son las razones que originan los hechos? ¿Qué cree sobre la problemática? ¿Qué significa la problemática y cómo la define? ¿Qué puntos de vista tiene?
a	Tomar conciencia de aspectos importantes	Toma de consciencia. Analizar conceptos que definen la problemática.	¿Cómo se define y en qué consiste la problemática? ¿Cómo abordar la problemática desde otros puntos de vista?
C	Crear alternativas para la acción	Decisiones. Evaluar solución la situación. Buscar estrategia.	¿Qué alternativas de acción hay? ¿Cuál es una posible solución a la situación?
T	Comprobar la nueva situación	Probar en una nueva situación (otro ciclo).	¿Cuál es la pregunta que reformula el conflicto inicial?

Para comprender el proceso de reflexión que revelan los FPM, se usa la descripción crítica de la experiencia, haciendo la reconstrucción analítica del proceso formativo en el contexto; se examina la evolución y características de las tareas matemáticas escolares diseñadas e implementadas. Las categorías objeto de análisis son: variables de tarea; componentes de la tarea y funciones de la tarea. Dichas categorías se manifiestan como producto del proceso reflexivo y dan evidencia del conocimiento usado por los FPM al abordar las problemáticas de la práctica docente (Castellanos *et al.*, 2017). Las categorías de análisis se describen en el informe por episodios; las interpretaciones se ilustran con extractos de las producciones de los FPM (marcadas entre comillas).

3. Ciclo reflexivo sobre las tareas para el aprendizaje

El reactivo del ciclo de reflexión lo constituyó la selección y el diseño de tareas para una clase de Álgebra escolar, en coherencia con la problemática abordada en términos del sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2006). El proceso reflexivo se cubrió acorde a las fases ALaCT (figura 1) a través de ciclos iterativos. A continuación, discutimos los resultados del proceso reflexivo que realiza Juan cuando rediseña e implementa una clase ajustando las tareas escolares para enseñar la factorización y la transformación de expresiones de la forma $(a+b)^2$.

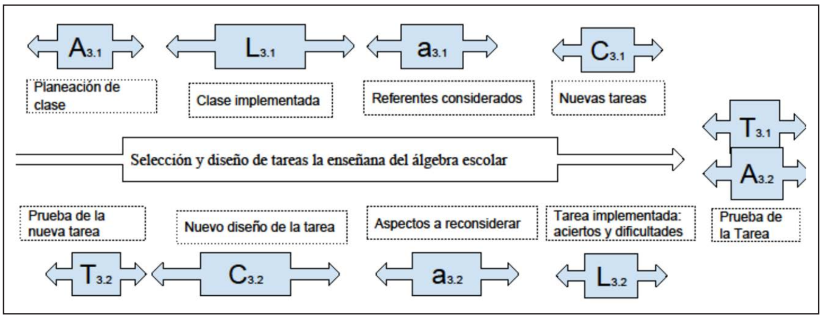


Figura 1. Trayectoria formativa para promover ciclos reflexivos.

En el análisis del ciclo reflexivo interpretamos las situaciones problemáticas que identifican y formulan los FPM a partir de la planeación y puesta en marcha de una clase para el plan de aula. Examinamos los ajustes que las tareas escolares sufren en su diseño; nos centramos a lo largo del ciclo ALaCT en las variables de tarea, funciones y componentes que han sufrido cambio, producto de las acciones reflexivas.

3.1. Fase A: partir de la acción o experiencia

Episodio 1. Juan expone situaciones conflictivas que surgen de su práctica al planear una clase de álgebra (figura 1). Las cuestiones son referidas al diseño de tareas y a su coherencia con el propósito de la instrucción. Juan identifica la problemática y describe dos fenómenos del ámbito didáctico que le inquietan: el sentido estructural que dan los alumnos a las tareas de factorización y las dificultades del aprendizaje:

> ¿Cuál es la situación problema?
>
> Se sienten inhábiles para dar sentido a los conceptos, no reconocen una estructura interna familiar, involucrada en la expresión dada. Me explico: $m^2 + 6m + 9$ tiene la estructura interna de un binomio cuadrado, o sea $(m+3)^2$.
>
> No logran ver cómo (o por qué) trasformar esta expresión.
>
> Mi afán está en la factorización de TCP, el sentido estructural que dan los jóvenes, prepararlos para el desempeño alto y que entiendan lo que hacen y por qué proceden así.

Juan ha identificado como foco de inquietud la factorización de un trinomio cuadrado perfecto (TCP). Para esto, los alumnos deben reconocer la identidad notable involucrada en las expresiones algebraicas de la forma TCP. Juan identificó dificultades de los escolares para «comprender la estructura interna de la expresión dada y reconocer en ella, una estructura familiar».[1] El FPM identifica esta problemática como un hecho que tiene fundamento en el primer descriptor del sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2006). La primera versión de la tarea que Juan creó para su clase (figura 2) son ejercicios con una formulación instrumental, en contexto puramente matemático, dejando claras las instrucciones y los datos.

Juan esperaba lograr la conexión de conceptos, usando algunas preguntas con las que podría obtener variadas estrategias de solución y su justificación. La tarea, con instrucciones guiadas, pretende llegar a una solución determinada de antemano, que busca «reconocer las relaciones entre los términos de la expresión» y su simplificación, para «ayudar a dar sentido a la estructura (interna) de dichas expresiones». Interpretamos que Juan diseña tareas que consideran las dificultades de aprendizaje de

1. Estructura familiar: referida a los «casos de factorización» o fórmulas que indican cómo, dada la estructura externa específica del polinomio, se establece el procedimiento para expresarlo como producto de dos o más factores. En esta ocasión arrancan de las identidades notables basadas en cuadrados de un binomio.

PRUEBA	TALLER:	LECTURA:	EVALUACIÓN:	GLOBAL:	GUIA TALLER
OBJETIVO: Identificar los conocimientos sobre simplificación de fracciones algebraicas.					
RECOMENDACIONES: Lea detenidamente y siga las instrucciones indicadas.					
VALORACION DE LA EVALUACION: VALORACION CADA PUNTO: 2.0 Vo.Bo. Jefe Area:					

1. Observe con atención las siguientes expresiones algebraicas. ¿Qué puede decir de ellas, de su forma?
   - $m^2 + m + m + 1$
   - $a^2 + 3a + 3a + 9$
   - $x^2 + (2)(4x) + 16$
2. Observe el segundo y tercer término de cada expresión ¿Qué puede decir de estos términos? ¿Qué relación guardan con el primer término? ¿Qué relación guardan con el cuarto?
3. Analizar la expresión $x^2 + (2)(4x) + 16$. Observe el tercer termino ¿Qué puede decir? ¿Qué relación guarda con el segundo y con el primero?

Figura 2. Tarea diseñada por Juan en la fase A

los escolares. Se centra en tareas para orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización. La tabla 4 sintetiza el análisis de la fase A al problematizar la práctica en términos de la planeación de tareas para la enseñanza de la factorización.

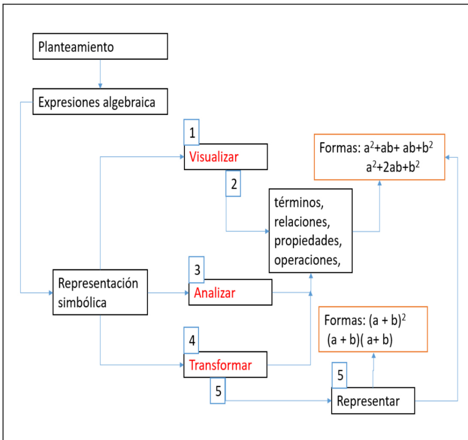
Tabla 4. Síntesis de las dimensiones de análisis en fase A.

Formulación de la problemática	Análisis de las tareas
Sujetos: jóvenes de 8.º grado (13-14) años. Objeto: factorización de un TCP. Origen: dificultad para reconocer una estructura familiar (identidad notable). Acción: orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización. El déficit del FPM, necesidad de actuación. Cuestión: ¿cómo involucrar a estudiantes en el sentido estructural que conlleva la factorización? Percepción de la solución: existen acciones para orientar la conexión entre las identidades notables y la factorización.	Reconoce dificultades asociadas a tratamiento y reconocimiento de la estructura interna de TCP. Considera las relaciones conceptuales y procedimentales del contenido necesarias en la organización cognitiva de las tareas. Reconoce la simplificación de fracciones algebraicas como un contexto que da sentido a la factorización. Valora las dificultades asociadas a la conexión de procedimientos y relaciones como oportunidad para el diseño de tareas. Explicita las expectativas de aprendizaje involucradas en la tarea.

3.2. Fase L: mirar hacia atrás en la acción

Episodio 2. Juan pone en marcha las tareas planeadas y, posteriormente, reconstruye la clase (figura 1), a fin de explicitar los fundamentos de sus acciones. Analizamos la clase e interpretamos las razones que ofrecen para justificar la problemática.

Juan resalta aspectos examinados en su lección (figura 3); centró su actuación en los errores de los escolares, los cuales involucran el sentido que los escolares dan a la estructura de una expresión algebraica. Las precisiones que Juan logra al explicitar la realidad que ocurre en su lección le permiten, como señala Flores (2007), distanciarse de sus presupuestos iniciales. Mirar hacia atrás en la acción conduce a resaltar la coherencia con los objetivos del aprendizaje, precisando la noción de actividad algebraica (generacional y global) y las variables de tareas (situaciones y complejidad). Juan percibió la visión relacional del cálculo aritmético en la comprensión de las estructuras internas de las expresiones algebraicas; consideró necesario trabajar los TCP más allá de las actividades algebraicas de tipo transformacional (p. ej.: generalizar las expresiones algebraicas interpretando las relaciones que se definen en una expresión aritmética)



Mirar hacia atrás en la acción

- La comprensión de la expresión algebraica» requiere de tareas para «alejar el proceso algorítmico» [1 y 2]
- Visualizar y analizar la estructura (interna y externa) de la expresión algebraica [2 y 3], requiere tareas que consideren la expresión algebraica como un todo. (significado dual del álgebra: objeto-proceso) [4].
- Las tareas que involucran el cálculo aritmético y el uso de estructuras aritméticas pueden conducir a la comprensión semántica del TCP [4y5],

Figura 3. Ruta de la lección examinada por Juan en la fase L.

En síntesis, el FPM reconoce que las tareas deberían plantear un reto al escolar, demandando el uso de conceptos en otros escenarios diferentes a los inicialmente aprendidos (tabla 5). Al igual que Thanheiser *et al.* (2016), al examinar Juan lo que significan las tareas bien diseñadas, reconoce sus propias concepciones y dificultades conceptuales.

Tabla 5. Síntesis de las dimensiones de análisis en la fase L.

***JUAN Nueva Cuestión:* ¿Cómo implicar la estructura interna de expresiones aritméticas en tareas para promover el sentido estructural?**
Reconoce en la teoría los descriptores del sentido estructural para la formulación de las tareas.
Explicita algunas variables de tarea (complejidad, contenido).
Identifica la actividad algebraica implicada en la formulación de tareas.
Reconoce en la simplificación de fracciones algebraicas un contexto que da sentido a la factorización.
Da organización cognitiva a la secuencia de tareas.

3.3. Fase a: conocimiento de puntos importantes o esenciales

Episodio 3. Siguiendo la trayectoria formativa (figura 1), se guía la confrontación entre pares y formadores, con el propósito de analizar los aspectos importantes de las tareas. Juan y sus compañeros de práctica ponen en común hechos relevantes de la lección y confrontaron sus perspectivas para abordar la enseñanza del $(a+b)^2$. La figura 4 resalta los aspectos importantes considerados en la discusión por los FPM para la solución otorgada por los escolares a la tarea.

Para los FPM, es relevante la «relación entre los sistemas de representación, aludiendo a la comprensión de las trasformaciones sintácticas que se definen en $(a\pm b)^2$»; resaltan la pertinencia de las distintas estrategias y las limitaciones de los alumnos en la retroalimentación y formalización conceptual. Los FPM compararon sus posturas y llegaron a acuerdos, resaltando la intención de «abandonar el diseño de tareas con tendencia tradicional» basadas en el «manejo algorítmico de ejercicios». Ellos toman conciencia sobre las tareas de modo funcional, en tanto que recono-

Demanda: Establecer la equivalencia entre los miembros de una estructura familiar del tipo TCP (caso/identidad) **Solución:** Reconocer relaciones aditivas y multiplicativas en una estructura aritmética para demostrar la identidad. **Discusión:** Relevancia al tratamiento aritmético (relaciones que sustentan las operaciones) para establecer las equivalencias entre los miembros de una identidad **Interesante:** Acudir la estructura aritmética para demostrar la igualdad y las relaciones internas del TCP. Otorgar sentido a la estrategia para reconocer una estructura familiar (caso/identidad). Reconocer relaciones internas entre los términos. Contextualizar conceptos que dan sentido al aprendizaje (cuadrado perfecto) **IMPORTANTE:** Usar las relaciones aritméticas (aditivas multiplicativas) para generar (o demostrar) la estructura interna de los TCP y posteriormente, su reconocimiento. Los jóvenes factorizan cuando comprenden que las expresiones algebraicas que cumplen con la estructura del binomio cuadrado son equivalentes antes y después de ser factorizados. Lo esencial, usar las estructuras aritméticas para deducir las identidades notables en la factorización del TCP (factorización).	En la expresión $25 + (2)(3)(b) + b^2$ Escribían que era un TCP. Algunos establecieron la equivalencia $(5+b)^2 = (5+b)\ (5+b)$. Sin ningún raciocinio, pero logran establecer la estructura multiplicativa asociada con dos factores (binomios) En las expresiones: $25+30+9 = (5+3)^2$ $25 + (2)\ (15) + 9 = (5+3)\ (5+3)$ buscaban la equivalencia, pero no expresaban de manera general la relación entre 30 y los otros términos. En algunos casos identificaban los términos que son cuadrados perfectos, sin lograr los factores de 30 en términos de 3 y 5. Pocos comprendían la estructura interna que define los TCP. Muchos, eran hábiles al realizar productos notables, pero no identifican las relaciones entre los términos que lo determinan la expresión $36a^2 + 12ab + b^2$ y, la expresión $(b + 6a)\ (6a + b)$. son equivalentes. Porque: el orden de los términos internos no altera el significado, pero en número si da

Figura 4. Análisis de aspectos importantes de la tarea implementada en fase A.

cen «la importancia de las situaciones problema para abordar el contenido». La tabla 6 muestra un extracto de la síntesis y conexión conceptual de la puesta en común. Los FPM resaltaron tres ámbitos importantes: *a*) el sistema de representación simbólico de $(a\pm b)^2$ y su vinculación con la aritmética; *b*) la fenomenología del $(a\pm b)^2$ y la conexión con la noción de equivalencia, y *c*) la relación de los campos procedimental y conceptual con el sentido estructural.

Tabla 6. Conexiones y síntesis conceptual resultado de la puesta en común.

Síntesis
Incluir las representaciones como meta en la tarea: favorecer la representación del concepto *binomio cuadrado* y la comprensión de las operaciones que se emplean para factorizar el TCP.
Involucrar tareas de autorregulación con expresiones numéricas y buscar la percepción de la estructura de TCP.
Prever la simplificación de fracciones algebraicas y la solución de ecuaciones cuadráticas para dar sentido a la factorización.
Aprovechar estructuras (internas y externas) de expresiones aritméticas para trabajar la noción estructural de equivalencia de las expresiones con el binomio cuadrado usando problemas.

Referentes y aspectos a consultar
Aspectos a profundizar.
Profundizar en tareas que promuevan habilidades para el reconocimiento de la estructura interna de una estructura familiar en su forma simple (identidad notable).
Consultar el sentido estructural, que traten la equivalencia de las identidades notables.
Referentes concretados y elegidos.
Descriptores del sentido estructural explicitados en Vega-Castro (2013).
Características y actividad algebraica (generacional, transformacional, global) (Kieran, 2004).

Producto de la puesta en común, los FPM aprecian aspectos relevantes de los componentes de la tarea para conducir a posibles transformaciones: «la gestión de la enseñanza, la función de los sistemas de representación en el propósito de la tarea y la contextualización de la tarea». Juan y sus compañeros ubicaron como punto de convergencia para afrontar la problemática «la resolución de situaciones contextualizadas».

3.4. Fase C: crear, buscar y preparar alternativas para la acción

Episodio 4. Siguiendo el experimento (figura 1), Juan, de forma consciente, presenta el nuevo diseño de la tarea para afrontar su problemática en una nueva lección.

Rediseña la tarea con el objetivo de «interpretar conceptualmente la factorización del TCP». La meta de la tarea era «reconocer en la estructura interna de los TCP una estructura familiar –identidad notable–». Interpretamos que Juan se inclinó por poner de manifiesto la reversibilidad del producto de dos binomios, mostrando «la factorización de los TCP como proceso que se trata de deshacer la multiplicación».

Juan rediseñó la primera parte de la tarea como una sentencia de ejercicios, basados en el estudio de Vega-Castro (2013), involucrando las estrategias de «verificar equivalencias, completar expresiones conservando la estructura» (figura 5). La alternativa para la nueva lección recurrió, además, al cálculo aritmético para reconocer patrones relacionales y generalizar la estructura de los TCP. Para Juan es pertinente usar expresiones aritméticas con estructuras semejantes a las estructuras algebraicas generales del TCP. Estimó necesario a tal fin, promover procesos reiterativos de relación entre dichas representaciones (simbólica y numérica). El propósito de la tarea es establecer las relaciones aritméticas y multiplicativas entre los términos del *TCP* y *factorizar*, es decir, superar la visión procedimental con los términos extremos. El alumno debe conocer la identidad e identificar cada objeto particular de la estructura con los objetos generales de la regla a usar. Juan precisó que «la expresión aritmética debe ser usada en dos vías: para conducir al análisis estructural y al análisis operatorio». Justificó esta apreciación aludiendo a «los eficientes cálculos usados por jóvenes y los argumentos equivocados aportados al demostrar la equivalencia entre expresiones»

I). Complete la siguiente tabla:

a	b	a+ b	$(a + b)^2$	a^2	$2\cdot a\cdot b$	b^2	$a^2 + b^2$	$a^2 + 2ab + b^2$
1	3							
2	4							
0	-2							
-1	2							

Observando los resultados de la tabla verificamos que la expresión algebraica equivalente a **$(a + b)^2$** es

Figura 5. Nueva alternativa para la acción. Parte 1 en fase C.

Según la segunda parte de la tarea (figura 6), Juan considera pertinente usar los recursos tecnológicos; a tal fin valoró el tipo de tarea, dando protagonismo a «las tareas abiertas», que demandan la argumentación y permiten profundizar en los descriptores del sentido estructural para incluirlos en la formulación, con el propósito lograr la «percepción de patrones relacionales (equivalencias) y su generalización en una estructura familiar».

Para Juan la tarea da respuesta al problema del sentido que tiene aprender las transformaciones sintácticas implicadas en las expresiones algebraicas, resaltando, además, las habilidades para percibir las identidades notables y anticipar las transformaciones que son apropiadas y eficientes al factorizar. Para Juan, «se puede dar sentido a la factorización desde la actividad de tipo transformacional en el contexto de las Matemáticas y de otras Ciencias», lo cual requiere de «la comprensión de las estructuras algebraicas y aritméticas».

Deducir la expresión estándar del trinomio (x^2 +bx +c) Identificar la relación entre los parámetros (a, b y c)
Trata con los parámetros en la extensión polinómica de $(a+b)^2$, asignando diferentes valores para a y b. Puedes usar la tabla de la parte uno para establecer tus comentarios y argumentaciones

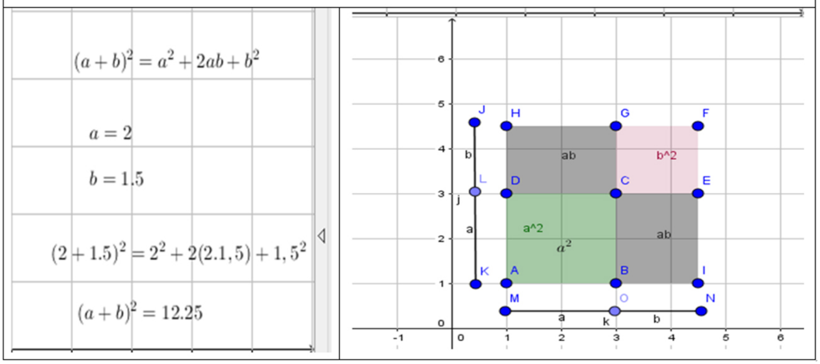


Figura 6. Nueva alternativa para la acción. Parte 2 en fase C.

3.5. Fase T: comprobar en una nueva situación

Episodio 5. Juan se dispone a implementar la tarea creada en la fase anterior. Destacamos la disposición del FPM para implementar una nueva lección y su responsabilidad para motivar a los escolares en el estudio de la factorización.

Juan se inclinó por la concepción del álgebra como «aprendizaje de las estructuras y como aritmética generalizada». Destacamos su disposición para conducir a los escolares en la autorregulación de conocimientos previos, en relación con la generalización de los nuevos. Resaltamos la toma de consciencia sobre la pertinencia de promover la actividad algebraica de meta-nivel (figura 6). Interpretamos la intención del FPM de alejarse del enfoque instrumentalista presente en el plan del aula de su clase, proponiendo el reconocimiento de las similitudes entre objetos y métodos. Juan logró ver que «el problema depende por lo menos parcialmente de las tareas», aclarando que estas, «deben tener propósitos claros, es decir, contribuir al aprendizaje del contenido». Reconoció necesario trascender la reproducción de los algoritmos, conscientemente aboga por la «comprensión de la dualidad objeto-proceso involucrada en definición de expresiones algebraicas» (figura 6, izquierda).

El propósito de la tarea:

- **Percibir** la expresión como unidad (objeto TCP).
- **Reconocer** en la expresión dada; la estructura interna de una expresión familiar más simple (SS_1 y afinando la idea de proceso).
- **Valorar técnicas** para establecer la equivalencia entre las expresiones.
- **Usar eficiente** y correctamente técnicas y operaciones algebraicas al factorizar (SS_3 Sentido estructural).
- **Hallar** generalizaciones a partir de situaciones particulares.
- **Exhibir** el desempeño del sentido estructural.

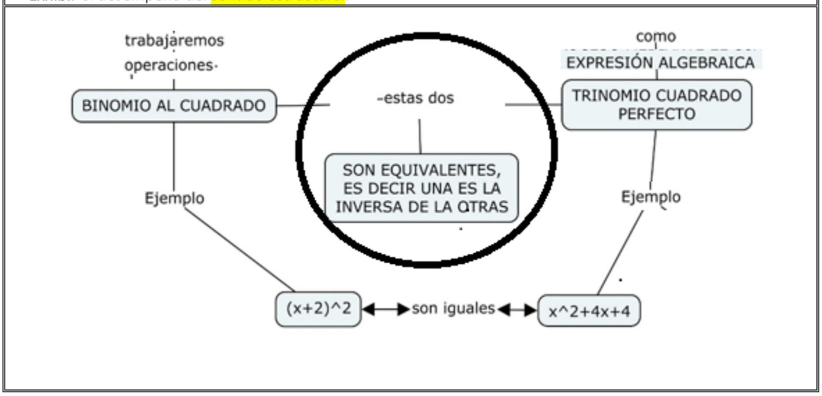


Figura 7. Situación descrita por Juan en el nuevo episodio de clase fase T.

3.6. Síntesis y nuevo ciclo reflexivo

La mirada retrospectiva a las fases del ciclo reflexivo permitió que los FPM valoraran todas las dimensiones y variables de tarea; contemplaran situaciones que puedan ser familiares a los escolares, dando protagonismo a «la solución de problemas». Finalmente, resaltaron la «pertinencia de las representaciones usadas (simbólica y grafica) en la formulación» y consideraron adecuada la demanda cognitiva de la tarea.

Juan y el colectivo de práctica examinaron la tarea puesta en marcha y concluyen con relación a los diferentes aspectos que caracterizan la problemática, tales como las limitaciones del aprendizaje (p. ej.: reconocer la equivalencia entre expresiones algebraicas), la gestión del contenido y la comunicación (p. ej.: dar significado a la variable como número generalizado) y la necesidad de involucrar situaciones para dar sentido al concepto.

Los FPM consideraron importantes «las componentes de la tarea» entre ellas: la formulación de la tarea, el modo de incluir el contenido y el uso de los sistemas de representación, examinaron las tareas para estudiar su coherencia y complejidad; se detuvieron en la contribución de la tarea a las expectativas de aprendizaje

Los FPM identificaron la necesidad de seguir abordando tareas que involucren seleccionar o reconocer procedimientos para transformar eficientemente las expresiones en función de su equivalencia. Para Juan, el estudiante debe comprender el cómo y cuándo usar un contenido; saber para qué y por qué transformar expresiones algebraicas en otras equivalentes; debe aprender y usar reglas de factorización, pero, sobre todo debe interpretar expresiones en términos del contexto, y debe usarlas para resolver problemas.

4. Conclusiones

El ciclo reflexivo y el diseño iterativo de las tareas matemáticas para la instrucción permiten al FPM entender cómo usar los datos recogidos durante la ejecución y analizarlos después para informar y proponer rediseño de nuevas tareas. Además, favorece la profundización del conocimiento del contenido matemático y otorga sentido a la práctica docente. Coincidiendo con otras investigaciones (Liljedahl *et al.*, 2007), consideramos que al iterar el diseño se aumenta la autenticidad de las tareas. Coincidimos en que, con la recopilación y análisis en cada fase reflexiva se promueve la comprensión de la práctica y el desarrollo profesional de los FPM, así la reflexión favorece el rediseño de tareas.

Los resultados del análisis respecto a las componentes de la tarea revelan que la formulación de la tarea atraviesa por tres grandes momentos a consecuencia de los procesos reflexivos asumidos por el FPM. En el primero, la tarea se formula en contextos matemáticos, sin involucrar situaciones o problemas contextualizados para conducir la comprensión del contenido. El segundo momento, que es posterior a la puesta en común entre pares (fase L), produce nuevas formulaciones, en las que el contenido se aborda a través de situaciones contextualizadas (representadas usando la geometría) y exhibiendo las demandas cognitivas al escolar. El tercer momento se da en la fase a, y en él se aprecia la importancia por formular tareas que involucren los contenidos a partir de la solución de situaciones reales, no solo contextualizadas. Con ello interpretamos que se produce una identificación de que la responsabilidad profesional explícita del FPM, tiene que llevarlo a introducir el contenido de manera funcional (resolución de problemas), sin haber podido constatar fielmente esta intuición.

Otro aspecto de especial importancia en los resultados son las variables de tarea: hemos podido evidenciar que los FPM inicialmente plantearon tareas cerradas y que solo involucraban demandas cognitivas de reproducción. Con el pasar de los procesos reflexivos y la precisión lograda en el análisis cognitivo las adaptaron de manera progresiva a demandas superiores. Los FPM valoran los aportes externos y deciden asumir algunos como referencia. En el caso analizado, los descriptores del sentido estructural interpretados en el estudio de Vega-Castro (2013), fueron asumidos para observar el desempeño de escolares al resolver tareas sobre la factorización, sin considerarlos para planear la enseñanza.

Como hemos podido observar y evidenciar, pese a que los FPM, al iniciar el ciclo reflexivo habían realizado el análisis de contenido, al diseñar las tareas solo se mostraron algunos de los elementos que integran la estructura conceptual del contenido. Hubo que esperar algunas fases del ciclo reflexivo y haber profundizado en los descriptores del sentido estructural, para que se replantearan la necesidad del razonamiento de tipo inductivo (inferir la generalización de estructuras numéricas) y el figurativo (representar superficies cuadradas) en especial, para formular tareas que demandan la comprensión de la estructura interna y externa al factorizar, habilidad considerada fundamental en el desempeño del sentido estructural (Vega-Castro, 2013).

5. Referencias

Blanco-Álvarez, H. y Castellanos, M. (2017). La formación de maestros reflexivos sobre su propia práctica y el estudio de clase. En: Vier Munhoz, A. y Giongo, I. M. (eds.). *Observatório da educação III: práticas pedagógicas na educação básica* (pp. 7-18). Criação Humana.

Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2017). Reflections on future mathematics teachers about professional issues related to the teaching of school algebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 31*(57), 408-429.

Castellanos, M. T., Flores, P. y Moreno, A. (2018). Reflexión en el prácticum: Un experimento de enseñanza con estudiantes colombianos. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 22*(1), 413-439.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos.* Paidós.

Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA, 1*(4), 139-158.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. En: Novotná, J. (ed.). *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 305-312). Faculty of Education, Charles University in Prague.

Korthagen, F. A., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. y Wubbels, T. (2001). *Linking Practice and Theory. The Pedagogy of Realistic Teacher Education.* Lawrence Erlbaum Associates Kieran, Krainer y Shaughnessy [2013].

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? The *Mathematics Educator, 18*(1), 139-151.

Kieran, C., Krainer, K. y Shaughnessy, J. M. (2013). Linking research to practice: Teachers as key stakeholders in mathematics education research. En: Clements, M. K. (ed.). *Third International Handbook of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 361-392). Springer New York.

Liljedahl, P., Chernoff, E. y Zazkis, R. (2007) Entretejiendo Matemáticas y pedagogía en el diseño de tareas: una historia de una tarea. *J. Math Teacher Educ., 10*, 239-249.

Lin, F. L. y Rowland, T. (2016). Pre-service and in-service mathematics teachers' knowledge and professional development. En: Gutierrez, Á., Leder, G. C. y Boero, P. (ed.). *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-520). Sense.

Melief, K., Tigchelaar, A., Korthagen, F. y Van Rijswijk, M. (2010). Aprender de la práctica. En: Esteve, O., Melief, K. y Alsina, A. (eds.). *Creando mi profesión: una propuesta para el desarrollo del profesorado* (pp. 39-64). Octaedro.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En: Rico, L y Moreno, A. (coord.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-254). Pirámide.

Newmann, F. M., King, M. B. y Carmichael, D. L. (2007). *Authentic instruction and assessment: Common standards for rigor and relevance in teaching academic subjects*. Des Moines, Iowa: Department of Education. Google Scholar.

Perrenoud, P. (2004). *Diez nuevas competencias para enseñar*. Graó.

Rico, L. y Moreno, A. (coords.) (2016). *Elementos de Didáctica de la Matemática para el Profesor de Secundaria*. Pirámide.

Schön, D. A. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Paidós.

Stake, R. (1998). *Investigación con estudio de caso*. Morata.

Stein, M. K. y Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics teaching in the middle school, 3*(4), 268-275.

Thanheiser, E., Olanoff, D., Hillen, A. *et al.* (2016) Reflective analysis as a tool for task redesign: The case of prospective elementary teachers solving and posing fraction comparison problems. *J. Math Teacher Educ 19*, 123-14. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9334-7

Vega-Castro, D. C. (2013). *Perfiles de alumnos de educación secundaria relacionados con el sentido estructural manifestado en experiencias con expresiones algebraicas* [tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de pedagogía*, *220*, 44-49.

6

El reto de alentar a las niñas a introducirse en campos STEM

The Challenge of Encourage Girls to Get Into STEM Fields

Encarnación Castro y Nuria Rico
Universidad de Granada

Resumen
En este capítulo presentamos una aproximación a STEM (*science*, *technology*, *engineering* y *mathematics*), así como la importancia de este campo de conocimiento en la resolución de los problemas de la sociedad actual. Ponemos de manifiesto la baja representación de mujeres y niñas en áreas STEM y algunas razones que se dan para ello. Referimos un proyecto de nivel nacional que llevamos a cabo con la intención de fomentar el interés de chicas estudiantes de Secundaria en materias STEM. Pretendemos contribuir a la divulgación de esta forma de enseñanza y señalar algunos escollos que encontramos al tratar de llevar a término nuestra tarea.

Palabras clave: educación, STEM, mujeres y STEM, brecha de género

Abstract
In this chapter we present an approach to STEM (science, technology, engineering, and mathematics) as well as the importance of this field of knowledge in solving the problems of today's society. We highlight the low representation of women and girls in STEM areas and some reasons given for this. We refer to a national-level project that we carry out with the intention of fostering the interest of female high school students in STEM subjects. We intend to contribute to the dissemination of this form of teaching and to point out some pitfalls that we encounter when trying to carry out our task.

Keywords: Education, STEM, women and STEM, gender gap

1. Introducción

El término STEM se forma con las iniciales de las palabras inglesas *science, technology, engineering y mathematics*. Según la Unesco (2017), STEM se puede definir en numerosas formas, dependiendo de la perspectiva elegida y los datos utilizados para contabilizar estadísticamente. Para algunos autores STEM representa una acción pedagógica que permite preparar a los estudiantes para las carreras de ingeniería, otros lo perciben como la preparación para una profesión, mientras que para algunos otros se trata de una corriente educativa que busca mejorar los conocimientos de la población sobre las componentes de STEM (Ceci y Williams, 2009). En su origen, STEM se fundamentó en razones económicas y sociales (Williams, 2011), surgiendo posteriormente su orientación educativa cuando la comunidad científica toma conciencia de la necesidad de tener ciudadanos formados en campos STEM. En las últimas décadas la fuerza laboral conectada con la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas se ha ido haciendo cada vez más esencial (Siregar *et al.*, 2019). Se prevé que las ocupaciones donde predominan la ciencia y la ingeniería crecerán por encima de la tasa promedio de todas las ocupaciones, con mayor incremento de aquellas en las que intervenga la informática (Hill *et al.*, 2010). La situación de crisis financiera mundial (años 2007-2009) hizo pensar que la integración de las actividades STEM en la educación animaría a más estudiantes a interesarse por estas áreas y posteriormente emplearse en campos de ciencia e ingeniería (Williams, 2011), pero la investigación ha puesto de manifiesto que el aumento de la necesidad de personas que trabajen en campos STEM no conlleva un aumento del número de personas interesadas en estos campos, sino que, por el contrario, dicho número disminuye (Dönmez e İdin, 2020).

2. Educación STEM

El término *educación STEM* se refiere a la enseñanza y el aprendizaje en las áreas de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas. Por lo general, incluye actividades educativas en todos los niveles, desde preescolar hasta posdoctorado, tanto en el ámbito formal (p. ej.: aulas) como informal (p. ej.: programas extracurriculares) (Gonzalez y Kuenzi, 2012). La educación STEM se puede acometer en un plan de estudios completo, nuevo, o puede hacerse mediante una integración de actividades STEM en el plan de estudios existente (Bergsten y Frejd, 2019). A nivel internacional existe un movimiento en pro de la educación STEM, considerada la educación del siglo XXI, basada en el fomento de las habilidades necesarias en el futuro (Kurup *et al.*, 2019). En los últimos años ha aumentado la importancia y popularidad de la educación STEM según el número de publicaciones surgidas sobre este tópico. Una demanda creciente se observa a favor de que los ciudadanos del futuro estén alfabetizados en materias STEM y tengan conocimiento de las interrelaciones socio-científico-técnicas y su aplicación para abordar problemas de la vida real. Se trata de que todas las personas, vayan o no a trabajar en estos campos, reciban este tipo de educación, de manera que estén preparados para enfrentarse y prosperar ante los desafíos que encontrarán en su vida (Nguyen *et al.*, 2020).

La innovación educativa asociada a STEM contempla un enfoque multidisciplinar donde se aúnan ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas en una sola disciplina, educación STEM integrada. Se trata de articular estas cuatro materias como una sola, en lugar de ser una organización de las cuatro en el plan de estudios (Dönmez e İdin, 2020). Este enfoque educativo se sustenta en principios, como: *a*) un rol investigador del alumnado que le exigirá planificar el trabajo, realizar búsquedas y decantarse por el material adecuado para resolver problemas reales; *b*) realizar trabajo en equipo lo cual llevará a establecer múltiples interacciones entre estudiantes; y *c*) una relación fluida profesor-alumno que propiciará que cualquier error sea subsanado con rapidez (Nguyen *et al.*, 2020). Esta práctica permite a los estudiantes explorar las diferentes disciplinas en un contexto más personalizado, lo que posiblemente les permitirá desarrollar habilidades de pensamiento crítico aplicables a todas las facetas de su vida académica y laboral. Siregar *et al.* (2019) indican que las actividades STEM fomentan las habilidades de pensamiento de los estudiantes, lo cual los llevará a desarrollar sus capacidades para analizar, evaluar, sacar conclusiones y argumentos de forma correcta y lógica sobre la resolución de problemas. Asimismo, contribuyen a mejorar la toma de decisiones y la creatividad, la autoestima, la autoeficacia, desarrollar la cooperación e interacción con los compañeros, adquirir un aprendizaje significativo y mejorar su actitud hacia las matemáticas y la ciencia, acrecentar la capacidad de liderazgo, el espíritu empresarial, la curiosidad e imaginación, la comunicación, el acceso y uso de la información (Saraç, 2018).

Una revisión de la literatura de investigación ha mostrado que la introducción de STEM en las escuelas tiene un impacto positivo, incrementando el interés de los estudiantes en las materias que forman STEM, su participación durante la instrucción en el aula, así como la comprensión de conceptos y el rendimiento del alumnado tanto de Primaria como de Secundaria (Siregar *et al.*, 2019). Se sugiere que se realice un acercamiento a la alfabetización STEM asumida no como un proceso estático, sino dinámico, cambiante con el tiempo, que capacite a las personas para el aprendizaje a lo largo de la vida (Brown, 2012; Jackson y Mohr-Schroeder, 2018).

La literatura evidencia con frecuencia varios elementos de preocupación con relación a la educación STEM. Recogemos algunos de ellos:

a) Falta de claridad sobre el significado de la propia expresión. A veces se ha referido a los cuatro componentes como estudios distintos, otras veces se apunta más a un enfoque interdisciplinario (English, 2017), en otras ocasiones es tratado como un plan de estudios novedoso que contempla desde la escuela primaria hasta el nivel universitario (Siregar *et al.*, 2019).
b) Escasa motivación de los estudiantes de países desarrollados por involucrase en aprendizajes de las materias que componen STEM. Numerosos estudios de investigación educativa han indicado que el interés y la motivación de los estudiantes hacia el aprendizaje STEM ha disminuido, especialmente en los países occidentales y en las naciones asiáticas más prósperas (Thomas y Watters, 2015).
c) El trabajo en el aula revela escasa integración entre las materias que componen STEM. En ocasiones los programas no integran completamente las áreas temáticas de STEM y como resultado no proporcionan un aprendizaje científico y matemático significativo (An, 2020).
d) Desequilibrio en el tratamiento dado a las distintas materias que intervienen en STEM. Los planes de estudio tienden a que

las materias de tecnología e ingeniería no sean consideradas tan esenciales como lo son las ciencias y las matemáticas (Wright *et al.*, 2018).

e) Baja confianza del profesorado sobre su preparación para desarrollar un currículo STEM. Muchos maestros de Primaria se sienten poco informados sobre el contenido STEM y menos cómodos en su enseñanza que en otras materias (Adams *et al.*, 2014).
f) Exigua presencia de la mujer en campos STEM. Las mujeres son uno de los grupos con menor representación en STEM, aunque constituyen el 50 % de la sociedad (García-Holgado *et al.*, 2019).

3. Escasa presencia de mujeres en STEM

Según la Unesco (2017), las mujeres representaban una minoría de los investigadores del mundo, y menos del 30 % de la fuerza laboral de I+D. El Ministerio de Educación y Formación Profesional, en el documento de 2021, Alianza STEM por el talento femenino, recoge los siguientes datos proporcionados, a su vez, por la Unesco:

> Solo el 35 % del alumnado matriculado en las carreras vinculadas a disciplinas STEM en la educación superior en todo el mundo son mujeres, y solo el 3 % de las estudiantes de educación superior opta por las tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC). (p. 1)

Esta escasa participación de mujeres en ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas constituye una preocupación constante para sociólogos y responsables políticos, debido a que:

> [...] la infrarrepresentación de mujeres en STEM se traduce en la pérdida de una masa crítica de talento, pensamientos e ideas, lo que obstaculiza a los países alcanzar su máximo desarrollo potencial. (Stoet y Geary, 2018, p. 17)

A pesar de que las mujeres han logrado importantes avances en cuanto a su educación y su lugar de trabajo durante los últimos tiempos, incluso en campos históricamente masculinos como los negocios, el derecho y la medicina, los logros educativos de las mujeres en las áreas científicas han sido débiles y su progreso en el lugar de trabajo muy lento (Hill *et al.*, 2010). En el caso de España, en las últimas décadas se ha producido un aumento de las mujeres que cursan estudios universitarios, pero este hecho no se ha reflejado en un aumento de su presencia en campos STEM, según señala el Ministerio de Educación y Formación Profesional (2021). Esta desventaja de las mujeres tiene sus orígenes en realidades que estimulan dicha situación. Factores asociados a los procesos de socialización y aprendizaje como normas sociales, culturales y de género, que influyen en la manera en que las niñas y los niños se educan e interactúan con sus padres, la familia, los amigos, los docentes y la comunidad en general (Unesco, 2017). Entre las razones dadas sobre esa precaria representación de las mujeres en materias STEM, están los estereotipos de género sobre las carreras STEM, los prejuicios de las mujeres sobre su éxito en estas profesiones y la falta de conocimiento sobre las posibilidades ocupacionales de dichas carreas, una insuficiente experiencia educativa temprana y la falta de referentes (Cheryan *et al.*, 2017).

Los estereotipos de género tienden a dar mayor importancia y valor a las profesiones «propias de hombres» y evaluar la competencia de los hombres en mayor medida que el de las mujeres (Corbett y Hill, 2015). Un área específica en la que los hombres son considerados más competentes que las mujeres son las matemáticas. Este estereotipo produce un peor rendimiento matemático en mujeres, o que las niñas evalúen sus habilidades matemáticas más bajo que los niños con logros matemáticos similares (Hill *et al.*, 2010). Este fenómeno cae dentro de lo que se conoce como *amenaza del estereotipo*.

4. Brecha de género en STEM

La *brecha de género*, según la Real Academia Española, es la diferencia entre la forma en que los hombres y las mujeres se comportan o son tratados en una sociedad, especialmente en términos de oportunidades, sueldo y estatus. La brecha de género en STEM es una de las muchas existentes en diversos ámbitos, y actualmente dicha brecha es enorme. Existe una más que notable desigualdad en la participación de mujeres y hombres en campos STEM. Un ejemplo que ilustra este hecho en España lo proporcionan los datos que publica el Ministerio de Educación y Formación Profesional. Se refieren a los estudios de Máster según sexo y ámbito de estudio, en el curso 2019-2020. En el curso señalado, el porcentaje de estudiantes mujeres supera al de hombres (55,6 % mujeres, frente 44,4 % hombres). Son mayoría las mujeres en: Salud y Servicios sociales (75 %); Educación (67 %), Ciencias sociales, periodismo y documentación (67 %); Arte y humanidades (59 %); Negocios, administración y derecho (54 %). Las mujeres son minoría en: Informática (23 %); Ingeniería, industria y construcción (31 %); Agricultura, ganadería, pesca, selvicultura y veterinaria (43 %).[1] Situación similar ocurre en otros países. Por ejemplo, Cheryan *et al.* (2017) indican que en EE. UU. el análisis del porcentaje de mujeres egresadas en licenciaturas en STEM desvela dos hallazgos relevantes: *a*) en ciencias biológicas, química y matemáticas y estadística hay un cierto equilibrio de género, mientras que las ciencias de la computación, la ingeniería y la física están altamente dominadas por los hombres; *b*) la tendencia a lo largo del tiempo manifiesta aumentos en la proporción de mujeres en ciencias biológicas y químicas durante las últimas tres décadas, pero poco logro en física, ingeniería, matemáticas y estadística durante este mismo periodo.

A pesar de los esfuerzos realizados durante los últimos decenios con miras a reducir la brecha entre géneros en lo relativo a la participación en disciplinas STEM, aún persisten grandes desigualdades (Monsalve *et al.*, 2020). Las mujeres siguen estando infrarrepresentadas en las áreas STEM, tanto en la fuerza laboral como en la académica.

La investigación sobre la discriminación por motivos de género en los campos STEM ha utilizado diferentes marcos teóricos, entre los que están la teoría del sesgo de género implícito y la teoría del rol social. La teoría del sesgo de género implícito, o inconsciente, sostiene que este sesgo está muy extendido y es común, incluso entre individuos que rechazan activamente estos estereotipos (Hill *et al.*, 2010). Dicho sesgo parte del supuesto de una menor capacidad de las mujeres y mayor en los hombres

1. Fuente: Ministerio de Educación y Formación Profesional (2021). Igualdad en cifras. Los porcentajes se han redondeado a valores enteros.

en matemáticas y ciencias y se ha mostrado que este sesgo influye negativamente en las mujeres en los siguientes casos: *a*) en la intención y motivación para cursar una carrera en campos STEM, *b*) en el empleo en campos STEM, y *c*) evaluaciones de desempeño y avance profesional en campos STEM (Yang y Carroll, 2018). La teoría del rol social precisa un conjunto de expectativas, normas y comportamientos para mujeres y hombres. Se espera que las mujeres sean cariñosas, solidarias, orientadas a las personas y comunitarias. Por lo tanto, deberían sentirse atraídas por disciplinas coherentes con estos roles, como la docencia y la enfermería. Por el contrario, los campos STEM se asocian con normas como ser competitivo, decisivo, ambicioso y arriesgado, todas ellas «propias» de hombres. Si bien algunos analistas afirman que la cultura institucional, la discriminación y los prejuicios limitan la participación de las mujeres en la ciencia, otros observadores no encuentran evidencia de discriminación contra la mujer en los campos STEM. Atribuyen las disparidades principalmente a la situación familiar y crianza de los hijos, expectativas de género, elecciones de estilo de vida, preferencias profesionales, y elección personal, entre otros factores (González y Kuenzi, 2012).

5. Formación en STEM

En la actualidad se aboga por un cambio de modelo educativo. Se advierte de que la educación actual no prepara a los estudiantes «para las demandas del mundo y el lugar de trabajo del siglo XXI» (Gravemeijer *et al.*, 2017, p. 120) y que muchos países, incluidos aquellos con economías avanzadas, no están educando adecuadamente para desarrollar una fuerza laboral STEM sólida para el futuro (Murray, 2019). Las niñas, las mujeres y las personas menos pudientes a menudo tienen escaso y más deficiente acceso a la educación y las carreras STEM. Este hecho es grave, dado que los estudiantes que no adquieran habilidades STEM no tendrán en el futuro las mismas oportunidades de ingresar en profesiones que requieran alfabetización matemática, científica y tecnológica que aquellos que sí las adquieran. Estas habilidades deberían desarrollarse desde el inicio de la escolarización. Partiendo de que las primeras experiencias de los niños tienen gran influencia en su vida, es acertado aprovechar las oportunidades que tienen en sus primeros años para que se sientan incluidos y empoderados en el aprendizaje STEM.

Aunque el énfasis en la enseñanza de la ciencia se coloca principalmente a partir del nivel de Educación Secundaria, los grados de Primaria son un momento valioso para desarrollar atracción de los estudiantes hacia STEM que no se debería desaprovechar. La investigación ha mostrado que el interés de los estudiantes por las ciencias disminuye significativamente a medida que avanzan en los grados de Primaria (Kurup *et al.*, 2019), una exposición temprana mediante experiencias apropiadas puede influir y fomentar el interés de los estudiantes en STEM. Implementar conceptos STEM en el plan de estudios de la escuela primaria implica enseñar a los estudiantes a través del aprendizaje basado en resolver problemas. No se les debe privar de este tipo de actividades, ya que dichos estudiantes poseen conocimientos y habilidades para participar en contenido STEM apropiado y puede que, a su vez, experimenten vocación hacia estas materias.

A nivel mundial existe la tendencia a disponer de escuelas centradas en STEM y profesorado competente para dichas escuelas. Estos intentos han puesto de manifiesto grandes desafíos. Uno de los desafíos gravita en la formación de los docentes, potenciales y en servicio. Los profesores precisan desarrollar el conocimiento necesario para poder realizar su labor en STEM convenientemente (An, 2020). Todos los docentes necesitan contar con las oportunidades adecuadas de desarrollo profesional y deben ser preparados para guiar a sus estudiantes hacia la adquisición de conocimientos STEM (Kennedy y Odell, 2014). Los profesores en formación deben prepararse minuciosamente para incorporar iniciativas STEM en el plan de estudios existente, dondequiera que enseñen (Kurup *et al.*, 2019), ya que las bases para un cambio educativo se asientan en la preparación de los futuros maestros. También los profesores en ejercicio requieren de la formación específica en campos STEM que la gran mayoría de ellos no poseen. Muchos tienen acceso limitado a los materiales de instrucción, las herramientas y la tecnología que necesitan. A veces, los estudiantes están tecnológicamente más avanzados que los profesores, lo que les pone en gran desventaja en el aula. El profesorado debe dominar las áreas STEM para generar confianza en sus estudiantes. Cuando los profesores se sienten eficaces en una disciplina tienen más probabilidades de involucrar a los estudiantes en esa disciplina.

Otro gran desafío para la educación STEM es la falta de modelos sobre cómo enseñar utilizando este enfoque (Siew *et al.*, 2015). Los docentes necesitan conocer cómo pueden integrarse las diferentes disciplinas en una sola de manera efectiva mientras que al mismo tiempo se asegura la integridad de cada una de ellas (English, 2017). Las investigaciones han mostrado las dificultades que encuentran los docentes para establecer vínculos adecuados entre los dominios STEM y se advierte de la existencia de programas que son simplemente un barniz STEM, es decir, donde no se integran las disciplinas y, por lo tanto, pueden carecer de un aprendizaje importante. El proceso de integración de ciencia, tecnología, ingeniería y matemáticas en contextos reales no es sencillo de llevar a cabo, puede ser tan complejo como los desafíos globales que exigen una nueva generación de expertos en STEM (Kelley y Knowles, 2016). Un enfoque más moderado que la integración puede ser equivalente a la interacción entre dichas materias (Williams, 2011). La interacción permite desarrollar y fomentar vínculos transversales en un contexto en el que se respeta la integridad de cada una de las materias. La interacción proporciona vínculos entre las materias cuando la justificación para ello está clara a juicio de los profesores y es pertinente para mejorar los resultados de aprendizaje de los estudiantes. La interacción respeta la integridad de las materias implicadas evitando situaciones como las señaladas por English (2017), quien indica que la educación STEM tiende a colocar las matemáticas en un segundo plano, relegándolas al soporte de contextos STEM, en lugar de ser importantes por derecho propio.

6. Experiencia de implementación de actividades STEM

Con el objetivo de instituir una experiencia de enseñanza/aprendizaje de STEM, entendida como un área multidisciplinar, y teniendo en cuenta la carencia de mujeres que se decantan por una formación relacionada con ella, durante el año 2019 se implementa en diferentes universidades españolas un programa llamado «Quiero ser Ingeniera». El programa consta de tres fases. La primera fase se desdobla con dos objetivos; por una parte, se pretende llevar a los centros educativos información acerca de la importancia de la educación STEM en todas las etapas educativas y, por otra, se pretende llamar la atención y prender el interés de los propios escolares en edades comprendidas entre los 12 y los 15 años sobre las áreas implicadas en STEM. Para cumplir con el primer objetivo, se programan una serie de entrevistas y charlas informativas en los centros educativos, dirigidas principalmente a los docentes, responsables de equipos de orientación y en general a los miembros que conforman el ecosistema educativo y de referencia de los escolares. En estas charlas se ofrece información acerca de la formación en disciplinas STEM y sobre el papel relevante que va a jugar para el futuro de los escolares, debatiendo propuestas para fomentar el interés, especialmente el de las chicas, hacia este tipo de disciplinas. Para el segundo objetivo de esta primera fase, se realiza una actividad de promoción y publicidad de las áreas STEM entre los escolares. El formato de esta actividad es el de una feria, con diferentes talleres y charlas a lo largo de una mañana donde se procura un acercamiento a las disciplinas STEM desde la experimentación y la observación de fenómenos llamativos y curiosos.

La segunda fase del proyecto tiene por objetivo procurar una experiencia algo más tranquila y reflexiva a las escolares que tienen interés por conocer de forma más profunda algunas ideas propuestas en la feria. Se elige como población objeto de esta actividad a las chicas interesadas, dándoles la posibilidad de realizar prácticas de ingeniería dentro de las propias dependencias de los centros de investigación y departamentos asociados a la Universidad. Así, diferentes grupos reducidos de chicas, jóvenes estudiantes de Educación Secundaria, tienen la oportunidad de participar, a lo largo de una jornada, en algún proyecto relacionado con las áreas STEM.

La tercera fase tiene por objetivo brindar una experiencia completa de aprendizaje STEM, entendido en el sentido que le dan Dönmez e İdin (2020). Es una actividad dirigida solamente a chicas preuniversitarias y consiste en la participación en un campamento de verano de una o dos semanas de duración, enfocado a la elaboración por grupos de un proyecto de ingeniería completo. Los proyectos se abordan en pequeños grupos y son guiados por un equipo de profesionales, pero en todo momento la búsqueda de soluciones y la implementación de mejoras está a cargo de los grupos de chicas participantes.

Las tres fases del proyecto se implementan en 6 universidades públicas españolas, al amparo de financiación específica del Instituto de la Mujer y para la Igualdad de Oportunidades. Una de las universidades participantes es la Universidad de Granada. En ella, la implementación de este programa se lleva a cabo durante los meses de enero a septiembre de 2019. Tras su desarrollo y posterior evaluación, la responsable del proyecto pone de manifiesto los puntos fuertes y débiles encontrados.

Como debilidades, se destaca la existencia de una gran animadversión por parte de los equipos docentes a su participación en debates y charlas de sensibilización. Se produce en la primera fase una gran tasa de rechazo a la participación. De 60 contactos efectivos con centros educativos, solamente se consigue trabajar en esta fase con 19 de ellos. Entre los motivos más comunes para el rechazo de la actividad, aparece un gran porcentaje que aduce falta de tiempo para realizar esta actividad (45 %), así como centros que indican que ya están trabajando en estos objetivos de forma autónoma y no consideran necesaria esta actividad (32 %). Otras razones dadas son: existencia de un calendario de actividades completamente cerrado, en el que no es posible admitir actividades no programadas desde principio de curso (17 %); oposición del equipo directivo a la realización de «actividades feministas», por considerarlas sesgadas y «en contra de los hombres» (5 %).

Otra debilidad detectada en la puesta en marcha del proyecto es la falta de compresión por parte de familiares y docentes para la implementación de actividades en las que la participación está reservada a niñas (fases segunda y tercera). En la puesta en marcha de las actividades dirigidas solamente a chicas, la exclusión de los chicos provoca reacciones en la comunidad educativa y el entorno de los jóvenes. En este sentido, se recogen diferentes quejas y sugerencias alineadas con un sentimiento de extrañeza, exclusión y discriminación, quejas que llegan no de parte de los propios chicos, sino de los adultos de su entorno.

En cuanto a las fortalezas, cabe destacar que durante las actividades que están dirigidas solamente a chicas, estas manifiestan sentirse cómodas y encuentran ventajas en el hecho de que la actividad sea exclusivamente para ellas. Una de las ventajas que refieren es el hecho de que cuando en los grupos de trabajo habituales de sus centros escolares hay chicos y chicas, ellas quedan relegadas a un papel secundario asumiendo ellos los roles protagonistas dejando poco espacio a las chicas. En segundo lugar, encuentran que en los grupos de chicas se perciben reflejadas unas en otras y se sienten más confiadas y seguras de su trabajo y sus decisiones, encontrando colaboradoras semejantes a ellas en cuanto a gustos e intereses, compañeras que son «difíciles de encontrar» en otro tipo de entornos. El organizar las actividades solamente para chicas es algo que ellas agradecen, valoran y encuentran positivo.

Por otra parte, como segunda fortaleza encontrada en el programa, está el hecho de que el personal docente e investigador que participa en los talleres y actividades del programa valoran de forma muy positiva el acercamiento mediante actividades lúdico-científicas a posibles futuros estudiantes. La interacción entre estudiantes de Secundaria y Bachillerato y personal universitario es considerada altamente relevante por ambos colectivos que la consideran muy enriquecedora.

Tras la implementación del programa completo, se llega a las siguientes conclusiones principales acerca de la puesta en marcha de este tipo de actividades:

- Abordar una alfabetización STEM que capacite a la población para la resolución íntegra de problemas es un reto para los planes de estudio actuales, en los que las disciplinas siguen estando diferenciadas en tiempos y espacios propios para cada una. Incluir en esta alfabetización medidas positivas para incrementar el interés en las chicas puede ser en ocasiones imposible de alcanzar por el rechazo habitual de la comunidad educativa.
- Implementar proyectos fuera del currículo para integrar actividades que aborden pequeños proyectos STEM puede ayudar a fomentar la curiosidad y el interés por este tipo de disciplinas.
- Las actividades dirigidas solamente a chicas para fomentar entre ellas la curiosidad y el interés por las áreas STEM, si bien son poco comprendidas por cierto sector de la sociedad, aportan efectos beneficiosos en cuanto a la autoconfianza y la au-

topercepción de las chicas que participan, incrementando en ellas el deseo de formarse y trabajar en campos relacionados con este tipo de disciplinas.

7. Reflexiones finales

En este texto hemos recogido aspectos de la educación STEM, la relevancia de potenciarla y las dificultades para implementarla. Nos hemos detenido en referir la escasa presencia de niñas y mujeres de este campo y la brecha de género existente en el mismo. Hemos recogido algunas de las voces que reclaman atraer y retener a más mujeres en la fuerza laboral STEM, requisito necesario para maximizar la innovación, creatividad y competitividad y hemos presentado las líneas generales de lo que fue un proyecto nacional cuyo objetivo general era fomentar vocaciones científicas en chicas estudiantes de Secundaria. El recorrido que hemos realizado nos permite indicar que el ascenso de la mujer en estudios STEM precisa de actuaciones como reeducar a la población en general, incluidos padres, familiares, amigos, docentes de las niñas, para ello sería necesario eliminar los prejuicios y estereotipos de género de la sociedad (importante los medios de comunicación y las redes sociales). La reeducación de padres y docentes es fundamental, ya que las expectativas de este colectivo sobre los logros académicos de los escolares a menudo tienen un sesgo de género que puede influir en las actitudes de estos escolares hacia sus preferencias.

Respecto a la enseñanza, se aconseja aplicar estrategias didácticas motivadoras en las materias STEM que las hagan atractivas para los estudiantes y desterrar los prejuicios de género dentro de este campo para crear una comunidad científica próspera, diversa y equitativa. Reclutar más niñas y mujeres para la informática, la ingeniería, las matemáticas y la física puede ser un primer paso para aumentar el número de mujeres en este campo, niñas de alto rendimiento cuya fortaleza académica es la ciencia. Asegurar, además, una retención adecuada, pues no serviría de mucho alentar a más niñas y mujeres a cursar estas materias para reducir las barreras de entrada si posteriormente se les desalienta para quedarse.

Concluimos con las palabras de Ceci y Williams (2011):

En la medida en que las decisiones de las mujeres sean tomadas libremente y las mujeres estemos satisfechas con los resultados, entonces no tenemos ningún problema. Sin embargo, en la medida en que estas opciones estén limitadas por la biología y/o la sociedad, y las mujeres no estemos satisfechas con los resultados, o el talento de las mujeres no se actualice, entonces tenemos un gran problema. (p. 5)

8. Referencias

An, S. (2020). The impact of STEAM integration on preservice teachers' disposition and knowledge. *Journal of Research in Innovative Teaching & Learning, 13*(1), 27-42.

Adams, A. E., Miller, B. G., Saul, M. y Pegg, J. (2014). Supporting elementary pre-service teachers to teach STEM through place-based teaching and learning experiences. *The Electronic Journal for Research in Science & Mathematics Education*, *18*(5), 1-22.

Bergsten, C. y Frejd, P. (2019). Preparing pre-service mathematics teachers for STEM education: an analysis of lesson proposals. *ZDM*, *51*(6), 941-953.

Brown, J. (2012). The current status of STEM education research. *Journal of STEM Education: Innovations and Research*, *13*(5), 7-11.

Ceci, S. J. y Williams, W. M. (2011). Understanding current causes of women's underrepresentation in science. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *108*(8), 3157-3162.

Ceci, S. J., Williams, W. M. y Barnett, S. M. (2009). Women's underrepresentation in science: sociocultural and biological considerations. *Psychological Bulletin*, *135*(2), 218.

Cheryan, S., Ziegler, S. A., Montoya, A. K. y Jiang, L. (2017). Why are some STEM fields more gender balanced than others? *Psychological bulletin*, *143*(1), 1- 35.

Corbett, C. y Hill, C. (2015). *Solving the Equation: The Variables for Women's Success in Engineering and Computing*. American Association of University Women.

Dönmez, İ. y İdin, Ş. (2020). Determination of the STEM Career Interests of Middle School Students. *Indexing/Abstracting*, *16*(4), 1.

English (2017). Advancing elementary and middle school STEM education. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(S1), 5-24.

García-Holgado, A., González, C. y Peixoto, A. (2019, octubre). Bridging the diversity gap in STEM. En: *Proceedings of the Seventh International Conference on Technological Ecosystems for Enhancing Multiculturality* (pp. 193-195).

Gonzalez, H. B. y Kuenzi, J. J. (2012). *Science, technology, engineering, and mathematics (STEM) education*: *A primer*. Congressional Research Service, Library of Congress.

Gravemeijer, K., Stephan, M., Julie, C., Lin, F. L. y Ohtani, M. (2017). What mathematics education may prepare students for the society of the future? *International Journal of Science and Mathematics Education*, *15*(1), 105-123.

Hill, C., Corbett, C. y St Rose, A. (2010). *Why so few? Women in science, technology, engineering, and mathematics*. American Association of University Women.

Jackson, C. D. y Mohr-Schroeder, M. J. (2018). Increasing STEM literacy via an informal learning environment. *Journal of STEM Teacher Education*, *53*(1), 4.

Kelley, T. R. y Knowles, J. G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM education*, *3*(1), 1-11.

Kennedy, T. J. y Odell, M. R. L. (2014). Engaging students in STEM education. *Science Education International*, *25*(3), 246-258.

Kurup, P. M., Li, X., Powell, G. y Brown, M. (2019). Building future primary teachers' capacity in STEM: based on a platform of beliefs, understandings and intentions. *International Journal of STEM Education*, *6*(1), 1-14.

Ministerio de Educación y Formación Profesional (2021). *Alianza STEM por el talento femenino*. http://www.educacionyfp.gob.es/prensa/actualidad/2021/02/110221-alianzasteam.html

Monsalve, L., Yasvily, P. y Villalonga. (2020). Ciencia y Tecnología: la brecha de género en Europa y América Latina. *Atenas*, *1*(49), 135-150.

Murray, J. (2019). Routes to STEM: Nurturing Science, Technology, Engineering and Mathematics in early years education. *Int. J. Early Years Educ.*, *27*, 219-221.

Nguyen, T. P. L., Nguyen, T. H. y Tran, T. K. (2020). STEM education in secondary schools: Teachers' perspective towards sustainable development. *Sustainability*, *12*(21), 8865.

Saraç, H. (2018). The Effect of Science, Technology, Engineering and Mathematics-STEM Educational Practices on Students' Learning

Outcomes: A Meta-Analysis Study. *Turkish Online Journal of Educational Technology-TOJET*, *17*(2), 125-142.

Siew, N. M., Amir, N. y Chong, C. L. (2015). The perceptions of regarding a project-based STEM approach to teaching science. *Springer Plus*, *4*(1), 1-20.

Siregar, N. C., Rosli, R., Maat, S. M. y Capraro, M. M. (2019). The effect of science, technology, engineering and mathematics (STEM) program on students' achievement in mathematics: A meta-analysis. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *15*(1), em0549.

Stoet, G. y Geary, D. C. (2018). The gender-equality paradox in science, technology, engineering, and mathematics education. *Psychological Science*, *29*(4), 581-593.

Thomas, B. y Watters, J. J. (2015). Perspectives on Australian, Indian and Malaysian approaches to STEM education. *International Journal of Educational Development*, *45*, 42-53.

Unesco (2017). *Measuring gender equality in science and engineering: the SAGA toolkit*. SAGA Working Paper 2. Unesco.

Williams, J. (2011). STEM education: Proceed with caution. *Design and Technology Education: An International Journal*, *16*(1).

Wright, G., Reeves, E., Williams, P. J., Morrison-Love, D., Patrick, F., Gineste, J., Mammes, I. y Graube, G. (2018). Abridged international perspectives of technology education and its connection to STEM education. *International Journal of Education*, *10*(4), 31-56.

Yang, Y. y Carroll, D. W. (2018). Gendered Microaggressions in Science, Technology, Engineering, and Mathematics. *Leadership and research in Education*, *4*, 28-45.

7

La resolución de problemas en los currículos oficiales españoles de Educación Secundaria y Bachillerato

Problem Solving in the official Spanish secondary education and high school curriculum

Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada

Resumen
Este capítulo recoge una visión de cómo ha sido considerada la resolución de problemas en los planes de estudios tal como fue expresado en los currículos oficiales españoles en la etapa que va desde 1950 hasta 2020. Nos detenemos en aquellos planes de estudios que prestaron más atención a algún aspecto relativo a la resolución de problemas. Partiendo del plan de 1957, en el que se incluye por primera vez la resolución de problemas como contenido, continuamos por la etapa oscura que, para la resolución de problemas, supuso la matemática moderna. Acabamos con la preponderancia que toma la resolución de problemas en el enfoque basado en competencias de los dos últimos planes de estudios.

Palabras clave: resolución de problemas, matemáticas, ESO, Bachillerato, currículo

Abstract
This chapter gathers a vision of how problem solving has been considered in the study plans as they were expressed in the official Spanish curricula in the stage that goes from 1950 to 2020. We stop at those study plans that paid more attention to some aspect related to problem solving. Starting from the 1957 plan in which problem solving is included as content for the first time, we continue through the dark stage that modern mathematics meant for problem solving. We put an end to the preponderance of problem solving in the competency-based approach of the last two curricula.

Keywords: problem solving, mathematics, secondary education, high education, curriculum

1. Introducción

Los currículos oficiales y las propuestas curriculares suelen incluir recomendaciones y propuestas cuya finalidad, a veces, no es fácil de entender con claridad por los que tienen que llevarlas a cabo en el aula, es decir, principalmente por los profesores y, en ocasiones, por los autores de libros de texto. Este aspecto lo expone Claude Gaulin con mucha crudeza en lo que a la resolución de problemas concierne (Gaulin, 2001), lo que ha conllevado en muchas ocasiones la necesidad de que los profesores realicen cursillos de formación. En esta aportación pretendo mostrar cómo ha sido considerada la resolución de problemas en los currículos oficiales de España posteriores a 1950 orientados a la enseñanza de Secundaria y Bachillerato, y comentar alguno de los aspectos de esas propuestas que me han llamado la atención relativos a la resolución de problemas.

2. Plan de 1957: ejercicios y problemas

Pese a que la resolución de problemas es tan antigua como la propia matemática, su inclusión explícita en los currículos oficiales y propuestas curriculares de organizaciones profesionales comienza a mediados del siglo XX. En España, la propuesta curricular para Bachillerato opción de ciencias del plan de 1957, contempla en 5.º curso de Bachillerato que se trabajen los «métodos de resolución de problemas: planteo y discusión» (figura 1). En el *BOE* de fecha 02/07/1957 se aprueban los cuestionarios de Bachillerato para el plan 1957, según Decreto de 2-V-57 (OM 5-VI-57), en el que la resolución de problemas aparece como una cuestión a tratar en lo que se refiere a métodos de resolución de problemas. Los estudiantes de 5.º curso de Bachillerato tenían una edad mínima de 15 años. Era el primer curso del Bachillerato superior, en el que ya se distinguía entre Ciencias y Letras.

OPCION DE CIENCIAS

MATEMATICAS

(Seis unidades didácticas semanales)

Iniciación al método racional. — Axiomas.—Teoremas: hipótesis; tesis; directos; recíprocos; contrarios.—Condición necesaria y suficiente.

Métodos de resolución de problemas: planteo y discusión.

Métodos especiales de la Geometría métrica.—Lugares geométricos.

Desarrollo racional de algún capítulo de la Aritmética.

Desarrollo racional de algún capítulo de la Geometría.

Funciones exponencial y logarítmica.—Cálculo logarítmico.—Progresiones. — Interés compuesto. — Anualidades.

Cálculo elemental de vectores. — Area orientada.

Números complejos.—Operaciones: relación con vectores planos.

Funciones circulares.—Teoremas de adición de ángulos y de funciones.

Resolución de triángulos cualesquiera.

Funciones y gráficas.—Noción elemental de tangente a una curva: noción de derivada. — Interpretaciones físicas.—Representación gráfica de las proporcionalidades directa e inversa.

Trinomio de segundo grado.

Curvas de frecuencia. — Histogramas.—Promedios.—Dispersión.

Nociones de combinatoria.—Potencia del binomio.

Probabilidad y frecuencia.

Curva normal.

184

Figura 1. Cuestionario de matemáticas para quinto curso de Bachillerato. Plan 1957.

En esta época el profesor seguía con bastante asiduidad el libro de texto oficial, por lo que la interpretación de esta propuesta en el aula la realizaron los autores de los libros de texto. Dos de los matemáticos españoles más conocidos en ese momento Rey Pastor y Puig Adam publicaron textos de matemáticas de acuerdo a estos cuestionarios del plan de 1957, entre ellos un libro de texto de matemáticas para quinto curso de Bachillerato (Rey Pastor y Puig Adam, 1958). El depósito legal se realizó en 1958, es decir, fueron de los primeros en desarrollar estos cuestionarios para la práctica del aula. Rey Pastor y Puig Adam realizan una interpretación de estos cuestionarios agrupándolos por capítulos y desglosando cada capítulo en lecciones. Concretamente, el segundo capítulo lo titulan «Los problemas matemáticos». Este capítulo constaba de dos lecciones, tituladas «El método reductivo», la primera, y «Métodos especiales de Geometría» la segunda, que trata la cuestión que aparece en el documento oficial con el título de *Métodos especiales de la Geometría métrica y Lugares geométricos* (figura 1).

El capítulo sobre el método reductivo comienza con una consideración sobre los problemas matemáticos:

> Los problemas matemáticos suelen consistir en hallar ciertos entes matemáticos (números en Aritmética; puntos, rectas, curvas en Geometría; funciones en Análisis matemático...) dadas condiciones suficientes para determinarlos. (p. 17)

Afirma a continuación que tal determinación suele efectuarse por un *proceso reductivo*. Rey Pastor y Puig Adam consideran un único método general para resolver los problemas matemáticos, el *método reductivo*, que aplican en aritmética, algebra y geometría. Para ellos, el proceso reductivo consiste en:

> [...] en sustituir las condiciones dadas por otras más sencillas que se desprenden de ellas, y estas a su vez por otras, si es preciso... y así sucesivamente hasta llegar a condiciones tan sencillas que definan por sí solas el elemento buscado.

Hay que reconocer que en un principio la expresión *método reductivo* produce cierta desazón, y más aún cuando es difícil rastrear en la literatura el origen de la expresión *método reductivo*. El término *reductivo* está en desuso y significa «que reduce o puede reducir» (RAE), y uno de cuyos sinónimos es *reduccionista*. El método reductivo se refiere a disminuir la complejidad de la resolución de un problema dado, descomponiéndola en una concatenación de resolución de problemas más simples. Uno de los ejemplos más utilizados de este método, en aritmética, es el de resolver los problemas de regla de tres por el método de *reducción a la unidad*. Este método se proponía en textos de Aritmética como alternativa más racional y analítica a los procesos sintéticos estandarizados como el de la regla de tres. Así lo expone Ezequiel Solana en su libro de *Aritmética*:

> **Reducción a la unidad.** Conviene mucho acostumbrarse a resolver por el procedimiento de reducción a la unidad, tan racional y analítico, los problemas de regla de tres. Todo se reduce a buscar el valor de una unidad de la cantidad principal, y determinar por él, multiplicando o dividiendo, el resultado que se busca. (Solana, 1925, p. 74)

El texto de matemáticas de Segura (1963) aclara algunas de las lagunas del texto de Rey Pastor y Puig Adam. Concretamente, Segura (1963) ciñéndose al texto del título propuesto por el Ministerio, aborda qué se entiende por métodos de resolución de problemas:

> No es posible indicar un procedimiento general que permita resolver todos los problemas de matemáticas; solamente se pueden dar algunas normas orientadoras que sirvan de ayuda. Estas normas se denominan *métodos de resolución*. (p. 45)

Así pues, desecha el supuesto de que hay un único método general y, además, señala que entre los más importantes se encuentran el *método sintético* y el *método reductivo*.

> El método *sintético*, que consiste en efectuar determinadas operaciones con los datos del problema, aplicando reglas conocidas, útiles para el tipo de problemas de que se trate. Por ejemplo: las reglas de tres, de interés, etc.
>
> El método *reductivo*, que consiste en pasar a otro problema cuyas soluciones traigan como consecuencia las soluciones del propuesto. Si el nuevo problema no se sabe resolver, se reducirá a otro, y así sucesivamente, hasta llegar a uno conocido. (p. 45)

Con respecto al método reductivo, Armoni *et al*. (2005) señalan que:

> La reducción es un método importante para resolver problemas en matemáticas y otras disciplinas científicas. Esencialmente, resolver un problema por reducción significa transformarlo en problemas más simples (o problemas cuya solución ya se conoce) y construir o deducir la solución del problema original a partir de la solución del nuevo problema. (p. 114)

Por ejemplo, el método de Gauss para resolver ecuaciones lineales. Este es en realidad un método reductivo, en el que la matriz definida por el conjunto dado de ecuaciones lineales se transforma en una matriz triangular, para la cual la solución es relativamente simple. Sin embargo, cuando se enseña este método, generalmente no se enfatiza su naturaleza reductiva. Considere otro ejemplo, en el que se pide a un estudiante que calcule la suma de todos los números entre 1 y 101 que no son divisibles por 3. Una solución directa a este problema es muy tediosa e implica una gran cantidad de cálculos. El problema también se puede resolver de forma reductiva: la suma requerida es la diferencia entre la suma de todos los números entre 1 y 101, y la suma de todos los números entre 3 y 99 que son divisibles por 3. Ambas sumas se pueden calcular como series aritméticas. Por tanto, el problema original se puede reducir a dos problemas separados de cálculo de una serie aritmética. Los estudiantes que no están acostumbrados al pensamiento reductivo pueden tener dificultades para llegar a esta solución, que tiene una complejidad técnica relativamente baja.

3. Plan de 1970: la matemática moderna

En la etapa de la matemática moderna se puso en práctica en la enseñanza el reduccionismo de la matemática a la lógica, que había sido desarrollado de forma teórica durante la segunda mitad del siglo XIX y principios del XX. La teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas desarrolladas a partir de ella sirvieron de base a lo que se denominó *matemática moderna* y encontraron un fuerte desarrollo en la obra del grupo francés Bourbaki. A partir de 1935 este grupo se propuso fundamentar toda la matemática a partir de la teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas. En el ámbito psicológico y educativo encontró un fuerte aliado en el psicólogo Jean Piaget. Este autor junto a un equipo de investigadores propuso que las estructuras mentales de los niños se adecuaban a la sucesiva complejidad de las estructuras algebraicas. La obra didáctica de Dienes y otros educadores de la época fomentaron su inclusión en el ámbito escolar.

La matemática moderna estaba destinada a la Universidad, pero pronto se fue adoptando en todos los niveles educativos. En España se inicia esta tendencia a finales de la década de 1960, y la primera propuesta oficial de currículo que se hace en esta línea fue la publicación de los Cuestionarios del Bachillerato elemental en 1967 realizada por el entonces ministro Manuel Lora Tamayo (MEC, 1967). Los cuestionarios para el Bachillerato superior no se llegaron a publicar por el cambio que se produjo en 1970 con la Ley General de Educación.

En este nuevo plan de estudios se incluyeron en el primer curso como los tres primeros temas: 1. Conjuntos. Inclusión. Partes de un conjunto. 2. Unión e intersección de conjuntos.3. Correspondencias entre conjuntos. En segundo curso: 1. Conjuntos. Producto de conjuntos. 2. Correspondencias y relaciones. Relaciones de equivalencia. Y en tercer curso: l. Revisión de las nociones de correspondencia y de relación de equivalencias. Relaciones de orden. En cuarto curso no se incluyeron ideas iniciales de teoría de conjuntos.

Con respecto a los anteriores planes, se suprimen en primer curso: los problemas de regla de tres simple por el método de reducción a la unidad; en segundo curso la regla de tres compuesta, los problemas de interés simple y descuento, repartos proporcionales, mezclas y aleaciones y, tercer curso los problemas de aplicación a la aritmética mercantil. La idea que presidió estos cambios es:

> Suprimir los temas del cuestionario anterior que no son esenciales y aquellos otros que por su contenido o por el pretendido rigor con que tradicionalmente se exponían, resultaban inasequibles, como la experiencia docente de muchos años ha demostrado. (MEC, 1967, p. 13429)

La distribución de las materias en los distintos cursos de este plan de estudios se hace procurando agrupar los temas alrededor de ciertas estructuras algebraicas fundamentales, que no se citan explícitamente en ninguna parte del cuestionario, y prescindiendo de la separación entre Aritmética y Geometría, que se dieron en el plan anterior.

Los planes que surgieron a raíz del a Ley General de Educación del año 1970 cambiaron la estructura del sistema educativo, pero mantuvieron y acrecentaron lo que ya estaba gestado. Lo expresa claramente el siguiente párrafo:

> Una de las funciones fundamentales de las matemáticas es la de ordenar conocimientos y crear estructuras formales que las resuman y expresen. Las estructuras formales están caracterizadas por unas leyes que permiten aplicarles, de modo preciso, unos automatismos, entre ellos el automatismo de la lógica que facilita su utilización en problemas variados. (MEC, 1970-71, p. 25)

Sobre la importancia de los problemas se insiste en este documento:

> La enseñanza de la matemática en todos los niveles, y preferentemente en la EGB, debe centrarse en el proceso de matematización de problemas, creación de sistemas formales, utilización de las leyes de estos sistemas para obtener unos resultados e interpretación de los mismos. (MEC, 1970-71, p. 25)

Pero la realidad es que, en esta etapa de la matemática moderna, lo que predominaba era una matemática formal en la que la resolución de problemas queda relegada en este documento a formar parte de las sugerencias de posibles actividades de *Reconocimiento y resolución de situaciones problemáticas, concretamente: a*) formular problemas tomados de la vida real, y *b*) identificar problemas y establecer gradualmente los pasos para su solución. No obstante, supone un paso adelante, pues se señalan aspectos de la resolución de problemas no presentes en propuestas anteriores.

Los planes de estudio para el BUP para matemáticas (MEC, 1975) siguen rígidamente los preceptos de la matemática moderna. Englobada en el área de ciencias matemáticas y de la naturaleza, su propósito era tratar:

> [...] de capacitar al alumno para comprender los fenómenos naturales, científicos y técnicos de su entorno. Se resaltará la importancia del mecanismo lógico implícito en el razonamiento científico habituando al alumno a los métodos deductivo e inductivo y a la experimentación. (MEC, 1975, p. 8064)

Pero la realidad viene ya reflejada en la orientación para el primer curso.

Las directrices que se dan para el primer curso del BUP de matemáticas es que se parta de los conceptos de *anillo* y *cuerpo* para tratar los temas de la asignatura. Entre ellos, proporcionar a los alumnos como aplicación práctica nociones de aritmética comercial. Es decir, ni siquiera los aspectos prácticos son enfocados como resolución de problemas. No hay concesiones en estos planes para la resolución de problemas. Tanto en la EGB como en el BUP hubo un fracaso bastante generalizado en cuestiones básicas, por lo que no es de extrañar que se popularizara el libro de Morris Kline *El fracaso de la matemática moderna* y que se produjera el movimiento de vuelta a lo básico.

Los Programas Renovados de 1979 no aportaron gran novedad en cuanto a la resolución de problemas, pues su finalidad era la estructuración de los programas en Bloques Temáticos desglosados en Temas de Trabajo, niveles básicos de referencia para cada uno de estos temas que constituyen los objetivos mínimos que se han de alcanzar. Son un *Documento de Apoyo al Profesorado* y el nivel de profundización de cada bloque temático. El documento pretende facilitar la programación, realización y evaluación del trabajo escolar (MEC, 1981).

4. Plan de 1991: enseñanzas mínimas

El Real Decreto 1007/1991 estableció las enseñanzas mínimas para la ESO. En él la resolución de problemas aparece como un objetivo a alcanzar a lo largo de toda la Educación Secundaria Obligatoria en todas las materias en las que hay que adquirir conocimiento. Propone:

> Elaborar estrategias de identificación y resolución de problemas en los diversos campos del conocimiento y la experiencia, mediante procedimientos intuitivos y de razonamiento lógico, contrastándolas y reflexionando sobre el proceso seguido. (MEC, 1991, p. 152)

La propuesta por materias consta de tres grandes apartados: objetivos generales, contenidos y criterios de evaluación. En lo que se refiere al área de matemáticas varios de los objetivos generales precisan la información sobre la resolución de problemas.

2. Utilizar las formas de pensamiento lógico para formular y comprobar conjeturas realizar inferencias y deducciones, y organizar y relacionar informaciones diversas relativas a la vida cotidiana y a la resolución de problemas.
4. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la convenien-

cia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados.

9. Actuar, en situaciones cotidianas y a resolución de problemas, de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión del lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

Cada uno de los cinco bloques de contenidos de que consta la propuesta correspondiente a matemáticas está desarrollado según conceptos, procedimientos y actitudes. Las ideas relativas a la resolución de problemas no aparecen en el apartado de conceptos, pero sí aparecen en procedimientos y actitudes, pero no de forma sistemática en todos los bloques. Concretamente se nota su ausencia en el bloque 2 de medida, estimación y cálculo de magnitudes, en el bloque 4 interpretación, representación y tratamiento de la información y en el bloque 5 tratamiento del azar. El bloque 3 representación y organización del espacio, recoge como procedimientos: *a*) la identificación de problemas geométricos diferenciando en ellos los elementos conocidos de los desconocidos y los relevantes de los irrelevantes, y *b*) la reducción de problemas complejos a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución. Asimismo, se recogen en este bloque 3 dos actitudes relativas a la resolución de problemas: *a*) perseverancia y flexibilidad en la búsqueda y mejora de soluciones a los problemas, *b*) interés y respeto por las estrategias y soluciones a problemas distintas de las propias. El bloque 1 números y operaciones, incluye varios apartados en procedimientos: *a*) la resolución de ecuaciones de primer grado, *b*) formulación y comprobación de conjeturas sobre situaciones y problemas, y *c*) utilización del método de análisis-síntesis para resolver problemas numéricos. También incluye dos apartados en actitudes: *a*) disposición favorable a la revisión y mejora del resultado de cualquier problema numérico, *b*) sensibilidad y gusto por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en problemas y cálculos.

Los criterios de evaluación ponen especial énfasis en aspectos de resolución de problemas. En ellos se detecta que, fundamentalmente, se deben aprender matemáticas para resolver problemas y, en menor medida también el uso de estrategias en situaciones de resolución de problemas. No hemos encontrado trazas que sugieran el aprendizaje de las matemáticas a través de la resolución de problemas.

5. Plan de 2006: las competencias

El currículo para la ESO de 2006 (MEC, 2007a) incorpora las competencias básicas como un componente nuevo junto a otros más tradicionales como los objetivos, los contenidos y los criterios de evaluación. Referidos a estos componentes el documento prescribe enseñanzas mínimas. Siguiendo las directrices europeas establece ocho competencias básicas, una de ellas es la *competencia matemática*, a la que caracteriza de forma extensiva, citando una serie de aspectos en los que los estudiantes se deben formar, entre los que están el razonamiento matemático y la resolución de problemas «para dar una mejor respuesta a las situaciones de la vida de distinto nivel de complejidad» (p. 687). La estructura que se le da en este currículo a la distribución de las enseñanzas mínimas en casi todas las materias es similar: se distribuyen en bloques y contienen un bloque inicial de «Contenidos comunes». Hay contenidos comunes que son semejantes en los cuatro cursos y en otros se producen ligeros cambios (tabla 1). Tengo la impresión de que no resultó fácil construir la propuesta del bloque 1, dada su novedad en los curriculares oficiales.

Tabla 1. Contenidos comunes del bloque 1 según el curso.

Contenidos comunes	Cursos ESO
• Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más simple, y comprobación de la solución obtenida.	1.º y 2.º
• Planificación y utilización de estrategias en la resolución de problemas tales como el recuento exhaustivo, la inducción o la búsqueda de problemas afines, y comprobación del ajuste de la solución a la situación planteada.	3.º y 4.º

• Expresión verbal del procedimiento que se ha seguido en la resolución de problemas. • Descripción verbal de procedimientos de resolución de problemas utilizando términos adecuados. • Descripción verbal de relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución utilizando la terminología precisa. • Expresión verbal de argumentaciones, relaciones cuantitativas y espaciales, y procedimientos de resolución de problemas con la precisión y rigor adecuados a la situación.	1.º 2.º 3.º 4.º
• Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre cantidades y medidas o sobre elementos o relaciones espaciales.	1.º, 2.º, 3.º y 4.º
• Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.	1.º, 2.º, 3.º y 4.º
• Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas.	1.º, 2.º, 3.º, 4.º
• Utilización de herramientas tecnológicas para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.	1.º, 2.º, 3.º y 4.º

En el desarrollo que hace la Junta de Andalucía de este currículo (Consejería de Educación, 2007) se da autonomía de los centros docentes, tanto pedagógica como organizativa, para el desarrollo y concreción del currículo de la Educación Secundaria Obligatoria. Entre las indicaciones que resaltan en matemáticas, está el énfasis en la resolución de problemas para adquirir competencias básicas:

> La resolución de problemas debe concebirse en este contexto como un aspecto fundamental para el desarrollo de las capacidades y competencias básicas en el área de matemáticas y como elemento esencial para la construcción del conocimiento matemático. Es, por ello, fundamental su incorporación sistemática y metodológica a los contenidos de dicha materia. (Consejería de Educación, 2007, p. 51)

Además, en esta Orden se subraya el aspecto transversal de la resolución de problemas que, junto con el uso sistemáticamente adecuado de los medios tecnológicos y la dimensión social y cultural de las matemáticas, deben entenderse como ejes transversales que han de estar siempre presentes en la construcción del conocimiento matemático durante esta etapa. Hay, pues, un cambio sustancial en la orientación del uso de la resolución de problemas en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. De la idea tradicional de aprender matemáticas para resolver problemas se pasa a resolver problemas para aprender matemáticas. Esto supone un desafío considerable para los equipos pedagógicos de los centros, debido a la falta de tradición al respecto y el esfuerzo enorme para llevarla a cabo. En consonancia con el papel importante que se le otorga a la resolución de problemas en esta Orden se la incluye como el primer núcleo temático con un carácter transversal.

6. Plan de 2014: resolución eficaz de problemas complejos

El currículo de 2014 incluye la noción de competencia como una componente base del currículo para lograr una *eficaz* resolución de problemas *complejos*. Esto se puede apreciar en el Real Decreto 1105/2014, por el cual se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. En la introducción de este decreto se da una descripción amplia de la noción de currículo que engloba a las competencias como uno de los aspectos que lo conforman:

> El «currículo» estará integrado por los objetivos de cada enseñanza y etapa educativa; las competencias, o capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa, para lograr la realización adecuada de actividades y *la resolución eficaz de problemas complejos*. (MECD, 2014, p. 169)

Así pues, la resolución de problemas es vista como una necesidad última a la que hay que atender para lo cual previamente hay que aprender o adquirir determinadas capacidades y competencias. Quizás en un intento de ser preciso en el lenguaje, los autores del documento añaden dos calificativos a la resolución de problemas que pueden poner en un aprieto a los que tienen que poner en práctica este currículo: uno de ellos es «eficaz» y el otro es «complejos».

6.1. Resolución eficaz de problemas

Con respecto al primero de los calificativos, cabe preguntarse: ¿qué es la *resolución eficaz de problemas*? Esta expresión puede ser interpretada de múltiples maneras. Puede ser interpretada como resolverlos en un tiempo récord, o que se utilice la estrategia más elaborada, o, por el contrario, la respuesta más sencilla, o que se dé una respuesta adecuada, razonable, coherente o aceptable al problema, o quizás que se resuelva de acuerdo al contenido matemático que se está estudiando en ese momento, o que se resuelvan con conceptos matemáticos lo más avanzados posibles. Estas son algunas de las posibles respuestas a la pregunta y que dejan con la duda de lo que se quiere transmitir en el documento sobre resolución eficaz, sobre todo cuando a los problemas se le añade que deben ser complejos. Tratando de entender el significado desde un punto de vista lingüístico, puede ser entendida en un uso habitual del lenguaje, por lo cual su significado en el diccionario de la lengua el término *eficaz* significa «que tiene eficacia» y, a su vez, *eficacia* significa «capacidad de lograr el efecto que se desea o se espera». Según esto, la resolución eficaz de problemas será la capacidad de resolver problemas. Con lo cual lo de eficaz sobraría o es reiterativo, pues previamente ya se había dicho que el currículo integra las competencias o capacidades para activar y aplicar de forma integrada los contenidos propios de cada enseñanza y etapa educativa a la resolución de problemas.

Tras la reflexión anterior, cabe la duda de si la expresión *solución eficaz de problemas* tiene un trasfondo más científico, es decir, si proviene del campo de investigación sobre resolución de problemas. Dado que la mayor parte de la literatura especializada sobre resolución de problemas está en inglés, he realizado una revisión de lo que se entiende por *resolución eficaz de problemas*, cuya traducción es *effective problem solving*. El trabajo más sugerente que aparece en la literatura es el clásico artículo de Larkin de 1979 titulado *Processing Information for Effective Problem Solving*. En este artículo, Larkin analiza formas con las que ayudar a los estudiantes a resolver problemas de física de manera eficaz. Sobre la base de sus observaciones de resolutores de problemas novatos y expertos, la autora sugiere enseñar los procesos utilizados por los expertos directamente a los estudiantes. Se plantea la pregunta: «¿Cómo se puede ayudar a los estudiantes a resolver problemas de física de manera más eficaz?» Para contestarla, hace lo siguiente: *a*) observa en detalle los procesos utilizados por «expertos», personas que son buenas para resolver problemas de física; *b*) extracta y resume las características esenciales de estos; *c*) enseña directa y explícitamente estos procesos a los estudiantes. Está claro que la autora entiende por solución eficaz la de un resolutor experto (en la investigación de Larkin se trata de profesores universitarios de Física). Hay que subrayar que la investigación de Larkin se realiza bajo la teoría del procesamiento de la información cuyo fin último es buscar la estrategia óptima en el espacio del problema, con el objeto de implementarla en programas de ordenador bajo la «filosofía» de la Inteligencia Artificial, incipiente en esa época.

Una interpretación alternativa a lo que es la resolución eficaz de problemas, la plantea Bardach (2012) en su guía práctica de ocho pasos para una resolución eficaz de problemas: definición del problema, obtención de información, construcción de alternativas, selección de criterios, proyección de los resultados, confrontación de costos y beneficios, decida y cuente su historia.

6.2. Problemas complejos

Incluso para investigadores expertos, la expresión *problema complejo* es difícil de definir y a los no expertos sumergirlos en un mar de dudas. Frensch y Funke (1995), como editores, pidieron a los autores de los capítulos del libro que dieran una definición corta de problema complejo. Las respuestas están recogidas en la tabla 2.

Tabla 2. Definiciones concisas de problemas complejos en Frensch y Funke (1995).

Autores	**Resolución de problemas complejos-*Complex problem solving* (CPS)**
Beckmann y Guthke	CPS representa una clase de tarea que exige el dominio cognitivo que requiere el reconocimiento de relaciones causales entre las variables de un sistema.

Autores	Resolución de problemas complejos-*Complex problem solving* (CPS)
Berry	Decidir si una tarea debe considerarse compleja o no, parece ser una cuestión relativa más que absoluta. Algunas tareas parecen ser complejas en comparación con muchas tareas experimentales tradicionales de resolución de problemas. En estos casos, la gran cantidad de variables y su interconectividad, la intransparencia, los rezagos temporales y la gran cantidad de metas a cumplir contribuyen a la complejidad de la tarea.
Brehmer	Me preocupa la capacidad de las personas para manejar tareas que son complejas, dinámicas (en el sentido de que su estado cambia tanto de manera autónoma como una consecuencia de las acciones de los tomadores de decisiones) y opacas (en el sentido de que el tomador de decisiones puede no ser capaz ver los estados de la tarea o la estructura de la tarea).
Buchner	CPS es la interacción exitosa con entornos de tareas que son dinámicos (es decir, cambian en función de las intervenciones del usuario y / o en función del tiempo) y en los que algunas, si no todas, las regularidades del entorno solo pueden revelarse mediante una exploración exitosa y una e integración de la información obtenida en ese proceso.
Dörner	El CPS se refiere al comportamiento de personas o grupos de personas en situaciones complejas, dinámicas e invisibles donde la estructura exacta y las propiedades de las situaciones son relativamente desconocidas. El solucionador de problemas complejos elabora permanentemente sus objetivos y construye hipótesis sobre la estructura (desconocida) del dominio. Él o ella toman decisiones y necesitan controlar los resultados.
Funke	El objetivo principal de aplicar paradigmas de investigación de CPS para la selección de personal es utilizar tareas más complejas, significativas, integradoras y realistas que requieren procesos y habilidades de pensamiento de orden superior. Las aplicaciones de selección y formación de personal adoptan paradigmas de investigación como tecnología y carecen de una definición común de CPS.
Huber	CPS es la tarea de optimizar una o más variables objetivo de un sistema mediante una serie de decisiones. El sistema consta de varias variables, existen varias acciones alternativas. La información sobre el sistema o los estados del sistema está incompleta (por ejemplo, no está disponible o es probabilística) o está retrasada. Puede estar involucrado un componente de tiempo.

Autores	**Resolución de problemas complejos-*Complex problem solving* (CPS)**
Kluwe	1. En relación con el entorno de la tarea, los problemas complejos pueden caracterizarse por un gran número de componentes (o variables) interrelacionados. 2. Con referencia al espacio del problema, los problemas complejos pueden caracterizarse por un gran número de operaciones cognitivas diferentes que son necesarias para buscar en el espacio del problema (por ejemplo, el número de pasos de un programa que simula la búsqueda de una solución). 3. Los problemas complejos, finalmente, pueden descomponerse en subproblemas más pequeños.
Krems	Un problema se denomina «complejo» cuando el estado final y el estado inicial se describen claramente, y cuando (a) no hay una definición precisa del espacio del problema (no está completa) y / o (b) no hay una definición precisa de los operadores disponibles (lo que puede hacerse). Tanto (a) como (b) dependen de las características específicas del dominio (por ejemplo, el contexto, el número y la conectividad de las variables relevantes) y del nivel de experiencia (cantidad de conocimiento sobre las características específicas del dominio). En general, uso el término CPS como más o menos equivalente a la resolución de problemas en dominios semánticamente ricos o en tareas ricas en conocimiento.

Como señalan Frensch y Funke (1995), si bien todas las definiciones recogidas en la figura 1 difieren en algún aspecto, todas ellas comparten características importantes. Por ejemplo, todas ellas describen la resolución de problemas como una actividad cognitiva y, además, en todas ellas, aunque sea implícitamente, se comparte el marco de la teoría del procesamiento de la información. Lo que puede parecer sorprendente, sin embargo, es la constante falta de énfasis en la interacción entre el problema y el resolutor. Es decir, la mayoría de las definiciones definen un problema en términos de las especificaciones de la tarea y prescinden en ellas del resolutor que la enfrenta.

6.3. La resolución de problemas en matemáticas

En este plan de estudios para la ESO y Bachillerato de 2014, todas las asignaturas de matemáticas contemplan la resolución de problemas, se convierte en objetivo principal. Se afirma que el proceso de enseñanza debe cultivar la habilidad para entender diferentes planteamientos e implementar planes prácticos, revisar los procedimientos de búsqueda de soluciones y plantear aplicaciones del conocimiento y las habilidades matemáticas a diversas situaciones de la vida real; sobre todo, se debe fomentar la autonomía para diseñar diferentes estrategias de resolución o extrapolar los resultados obtenidos a situaciones análogas. La resolución de problemas complejos ha de ir acompañada del empleo de herramientas tecnológicas.

La materia correspondiente a las distintas asignaturas de matemáticas incluidas en este currículo de la ESO y Bachillerato se distribuye en bloques. En todas ellas se incluye un bloque inicial, el «Bloque 1. Procesos, métodos y actitudes en matemáticas», que recoge fundamentalmente nociones relativas a la resolución de problemas. Los otros bloques se refieren a contenidos tradicionales del currículo de matemáticas. En cierta manera este bloque 1 recoge las ideas plasmadas en el «Bloque 1. Contenidos comunes» del currículo de la ESO del plan de 2006 (recordemos que en el Bachillerato no aparecía este bloque). Posiblemente dada la dificultad que tuvo el profesorado para interpretar o cómo abordar la resolución de problemas en un currículo basado en adquisición de competencias, en el Real Decreto de 2014, la resolución de problemas se incluye, junto a otras temáticas, en un primer bloque titulado «Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas» y se dan orientaciones más precisas de su función en el ámbito educativo. A este respecto dice el legislador:

> El bloque de «Procesos, métodos y actitudes en Matemáticas» es común a todos los cursos y debe desarrollarse de modo transversal y simultáneamente al resto de bloques, constituyendo el hilo conductor de la asignatura; se articula sobre procesos básicos e imprescindibles en el quehacer matemático: la resolución de problemas, proyectos de investigación matemática, la matematización y modelización, las actitudes adecuadas para desarrollar el trabajo científico y la utilización de medios tecnológicos. (p. 399)

Este bloque se desmenuza y detalla en una propuesta conjunta constituida por tres apartados: *a*) contenidos, *b*) criterios de evaluación y *c*) estándares de aprendizaje evaluables. Los contenidos que aparecen sobre la resolución de problemas son muy escasos y generales, concretamente se refieren a la planificación del proceso de resolución de problemas, estrategias y procedimientos puestos en práctica y reflexión sobre los resultados. En cuanto a los criterios de evaluación subrayan la comunicación verbal del proceso seguido en la resolución de un problema, la utilización de estrategias de resolución de problemas, la realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas y en la reformulación del problema tratando de profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc. Es decir, se olvidan de la fase de comprensión del problema y se centran en las fases de ejecución y reformulación de nuevos problemas. El apartado de «estándares evaluables» es más descriptivo y extenso que los otros dos anteriores. Se le da preponderancia a un amplio espectro de ideas relativas a la resolución de problemas, aunque de forma algo desordenada y entremezclada. De los 29 enunciados que contiene 19 hacen alusión explícitamente a la resolución de problemas. Se incluyen aspectos relativos al *problem-posing* (variar un problema dado o identificar situaciones problemáticas de la realidad, susceptibles de contener problemas de interés), evaluar la solución obtenida.

7. Referencias

Armoni, M., Gal-Ezer, J. y Tirosh, D. (2005). Teaching reductive thinking. *Mathematics Computer Education*, *39*, 2, 131-142.

Bardach, E. (2012). *A Practical Guide for Policy Analysis – The Eightfold Path to More Effective Problem Solving* [4.ª]. Sage.

MEC (1981). Programas renovados en EGB: Área de Matemáticas. *Vida Escolar*, 210, 1-80.

Consejería de Educación (2007). Orden de 10 de agosto de 2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. *BOJA*, *171*, 23-65.

Larkin, J. H. (1979). Processing Information for Effective Problem Solving. *Engineering Education, 70*(3), 285-288.

MEC (1967). Orden de 4 de septiembre de 1967 por la que se aprueban los Cuestionarios del Bachillerato Elemental. *BOE, 234*, 13421-13447.

MEC. Comisión Ministerial de planes, programas de estudio y evaluación (1970-71). Educación General Básica: nueva orientación. *Vida Escolar, 124-126*, 5-155.

MEC (1975). Orden de 22 de marzo de 1975 por la que se desarrolla el Decreto 160/1975, de 23 de enero, que aprueba el Plan de. Estudios del Bachillerato, y se regula el Curso de Orientación Universitaria. *BOE, 93*, 8049-8068.

MEC (1991). Real Decreto 1007/1991, de 14 de junio, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 152*, 21193-21195.

MEC (2007a). Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE, 5*, 677-773.

MEC (2007b). Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. *BOE, 266*, 45381-45477.

MECD (2014). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE*, 3, 169-546.

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1958). *Matemáticas. Quinto curso*. Nuevas Gráficas.

Segura, S. (1963). *Matemáticas. Quinto curso*. E. López Mezquida.

Solana, E. (1925). *Aritmética.* Magisterio Español.

8

Evolución histórica de las matemáticas en la formación de los maestros de Educación Infantil en España

Historical evolution of mathematics in the early childhood teacher training in Spain

Elena Castro-Rodríguez
Universidad de Granada

Resumen
En este trabajo realizamos una mirada retrospectiva de la formación matemática que han recibido los maestros encargados de la educación de los niños menores de 6 años en España. Desde sus inicios oficiales a mediados del siglo XIX hasta la actualidad, la formación de maestros de Educación Infantil ha sido excluida en muchas ocasiones en las reformas de los planes de estudio de magisterio y cuando ha sido regulada y reconocida a nivel oficial, la educación matemática ha tenido escasa presencia estando influenciada por los movimientos pedagógicos de la época como el método de Fröbel en el siglo XIX o las teorías de Piaget en la segunda mitad del siglo XX. Actualmente, con la adaptación de dichos planes al Espacio Europeo de Educación Superior, las directrices nacionales han quedado demasiado abiertas y cada universidad tiene libertad para delimitar tanto el tipo de asignatura como los créditos que se asignan a ella, por lo que la formación matemática de los maestros de Educación Infantil depende de la universidad en donde se imparta la titulación.

Palabras clave: formación de maestros, educación matemática, Educación Infantil, investigación histórica

Abstract
In this work we develop a historical review of mathematics in the early childhood teacher training in Spain. From its official beginnings in the mid-nineteenth century to the present, the training of early childhood teacher training has not been included on many occasions in the reforms of the teaching agendas and when it has been regulated and recognized at an official level, mathe-

matics education has had little presence being influenced by the movements of the time such as the Fröbel method in the 19th century or the theories of Piaget in the second half of the 20th century. Currently, with the adaptation of the plans to the European Higher Education Area, the national guidelines are too open and each university is free to define the type of subject and the credits, so the mathematical training depends on the university.

Keywords: teacher training, mathematics education, early childhood education, historical research

1. Introducción

La formación matemática de los maestros es primordial, ya que enseñar matemáticas es una parte de su actividad profesional (Flores y Rico, 2015; Segovia y Rico, 2011). Este hecho no ha pasado desapercibido por Isidoro Segovia y Pablo Flores, los cuales, además de preocuparse y reflexionar sobre el tema, han dedicado gran parte de su carrera profesional a mejorar dicha formación. Más allá de impartir la docencia correspondiente en los títulos universitarios de maestro, han colaborado en el desarrollo de nuevos planes, elaborado libros para la formación matemática de los maestros, impartido cursos de formación continua o permanente, o ayudado y formado a los nuevos profesores del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Inspirados por esta dedicación, en el presente capítulo les rendimos homenaje centrándonos en una formación que ha sido relegada en muchas ocasiones a un segundo plano, la formación de maestros[1] de Educación Infantil (Castro, 2011). Específicamente, realizamos una revisión histórica de la formación matemática que han recibido estos profesionales en España (denominados a lo largo de los años como *maestros parvulistas*, *de preescolar* o *de educación infantil*) desde sus inicios oficiales, a mediados del siglo XIX, hasta la actualidad con la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior.

1. Aunque casi en su totalidad la labor de maestro de infantil ha sido desempeñada por mujeres, a lo largo del capítulo utilizaremos el término genérico maestros.

2. El siglo XIX

Los inicios de la formación de maestros de Educación Infantil en España se remontan a la primera mitad del siglo XIX, momento en el que se empezó a regular la enseñanza en niveles inferiores a 6 años en instituciones denominadas *escuelas de párvulos*. Este hecho hizo que surgiera una nueva profesión,[2] la de maestro parvulista y, por ende, una formación específica para estos profesionales.

En esta época se incorporaron al sistema educativo las escuelas normales para la formación de maestros de Educación Primaria y las escuelas de párvulos para la educación de la primera infancia, como la Escuela de Virio en Madrid (posteriormente denominada Escuela Normal Central de Párvulos) la cual fue la primera escuela normal de párvulos en España (Sanchidrián, 1982, citado por Pérez y González, 2009). Otros hechos relativos a estos avances fue la publicación del Manual para los Maestros de Escuelas de Párvulos de Pablo Montesinos publicado en 1840, o la creación en 1876 de la Cátedra de pedagogía especial aplicada a la enseñanza de párvulos por el sistema de Fröbel. Esta era una cátedra pública de la Escuela Normal Central de Maestros de Madrid, donde por medio de lecciones alternas, se acreditaba a los maestros que, además de poseer el título elemental o superior, deseasen obtener esta especialidad (Colmenar, 2010).

Posteriormente, en el año académico 1882-1883, con la reorganización del plan de estudios de la Escuela Normal Central de Maestros de Madrid, se incluyó un curso especial de maestros de párvulos. Este curso, formado por diversos programas, incluye el programa de nociones de ciencias físicas y naturales que incluía nociones de aritmética y geometría. Sin embargo, este curso tuvo una vida efímera como consecuencia de la falta de alumnas (Colmenar, 1989).

Cabe destacar que, a pesar de que se encontraban en funcionamiento las escuelas normales, a los denominados *maestros de párvulos* no se les requería haberse formado en una escuela normal para acceder a la profesión, ni haber hecho prácticas en

2. Anteriormente en el ámbito privado existían las denominadas *escuelas de amiga*, cuya práctica continuó hasta el siglo XX (Diego-Pérez, 2013).

una escuela de párvulos, exigiéndoles un conocimiento referido a doctrina cristiana, letras, números y figuras, bastando en todo lo demás nociones muy ligeras (Diego-Pérez y González, 2009).

2.1. Cátedra de pedagogía especial por el sistema de Fröbel

Fröbel, pedagogo alemán, basó sus tratados para la enseñanza en Educación Infantil en las teorías del juego de Richter –que consideran esencial el uso libre de materiales simples, donde se establezca un orden propio y se descubra sus propios límites– y en las teóricas pedagógicas de Comenio, Rousseau o Pestalozzi –fundamentadas en la naturaleza, la intuición y la experimentación–. Su método fue considerado como un sistema innovador para la enseñanza de párvulos en la época (Lahoz, 1991) y actualmente continúa teniendo influencia en la enseñanza, y en el diseño de materiales manipulativos o recursos.

El método de Fröbel se instauró en España a través de la Catedra Especial de Pedagogía de Párvulos por el procedimiento de Fröbel, la cual tuvo una especial relevancia en la formación de maestros de estas edades. El profesor que impartió la materia para la cátedra de esta especialidad fue Pedro de Alcántara García. Asimismo, el programa de la nueva asignatura, que se impartió en las dos escuelas normales de Madrid, también fue elaborado por de Alcántara a partir de su asistencia por Europa a diferentes ponencias sobre el Método de Fröbel.

El programa ha quedado materializado a través del Manual teórico-práctico de educación de párvulos según el método de jardines de infancia de Fröbel (De Alcántara, 1879). Este consta de una introducción sobre la vida y obra de Fröbel, y dos partes diferenciadas. La primera describe los principios generales de la educación de acuerdo con el sentido de Fröbel, e incluye tres capítulos: la doctrina fundamental de la educación, manera de ser del niño y desenvolvimiento del hombre, y bases y caracteres fundamentales del método de educación y sus procedimientos. La segunda, compuesta por una introducción y seis secciones que detallaban minuciosamente el método pedagógico de Fröbel para Infantil, el estudio de cada uno de los «regalos» o «dones», cómo el maestro ha de introducirlos y actuar con ellos en el aula, ejercicios que se debía utilizar, así como los fines educativos propuestos con dichos ejercicios.

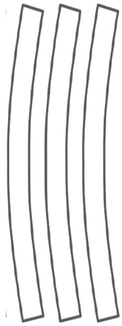
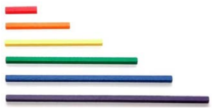
En el manual elaborado por de Alcántara (1879) podemos ver reflejado el interés de Fröbel por la arquitectura y las matemáticas (ya que se inició en el estudio de ambas materias, aunque no llegó a finalizarlos). Además del diseño y pautas arquitectónicas que debían de contemplar los jardines de infancia, las áreas matemáticas de geometría y espacio están especialmente presentes en los dones. Los dones de Fröbel son una secuencia de materiales con distintas formas geométricas que se ofrecen a los niños de forma progresiva y que promueven de manera especial el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Específicamente en el desarrollo de los ejercicios con los dones, «debe llevarse al niño de lo conocido a lo desconocido, de lo fácil a lo difícil, de lo particular a lo general, de los concreto a los abstracto» (De Alcántara, 1879, p. 94) para ello se propone hacer comparaciones con el don anterior, llevando a cabo juegos de construcción o de realización de formas y planteando cuestiones para dar lugar a conversaciones instructivas. La tabla 1 presenta los dones, así como los contenidos matemáticos que se proponen trabajar con cada uno de ellos según el manual. En algunas ocasiones estos dones no se corresponden con los originales, pues sufrieron diversas modificaciones por los discípulos de Fröbel.

Tabla 1. Dones y contenidos matemáticos a trabajar con ellos según el manual de Alcántara (1879).

Don	Descripción	Imagen	Contenidos matemáticos
1	Caja con 6 pelotas o bolas de colores (rojo, azul, amarilla, violeta, verde y naranja) del mismo tamaño y recubiertas de lana.		Atributos color y forma. Posiciones de objetos respecto a uno mismo y respecto a otro objeto. Línea, dirección, movimiento. Magnitudes peso y gravedad.

Don	Descripción	Imagen	Contenidos matemáticos
2	Caja con una esfera, un cilindro y un cubo de similares dimensiones. Los tres objetos tienen una anilla por donde pasar un cordón para poder colgarlos.		Análisis y comparación de formas, contrastes (semejante, opuesto, intermedio). Componer y descomponer: partes y todo. Cubo, esfera y cilindro. Movimiento de rotación. Caras, vértices y aristas. Ángulos. Horizontal, perpendicular.
3	Caja que contiene ocho cubos iguales de madera. (Cada cubo tiene la misma dimensión que el cubo del segundo don).		Componer y descomponer: partes y todo. Comparación de forma, tamaño, dimensión y volumen. Cuadrado, cubo, cara y arista. División de sólidos. Números enteros y fracciones (mitad, cuarto y octavo).
4	Caja que contiene ocho prismas rectangulares iguales de madera.		Mismos contenidos que en el don 3.º y, además: comparación de forma, tamaño, dimensión y volumen. Rectángulo. División de superficies. Contar hasta 16, suma y resta de un número del 1 al 8 +/– 1.
5	Caja que contiene 39 piezas: 27 cubos iguales, 3 cubos divididos en partes iguales y otros 3 divididos en cuartos formando en ambos casos prismas triangulares.		Se continúan trabajando los mismos contenidos que en los dones 3.º y 4.º.

Don	Descripción	Imagen	Contenidos matemáticos
6	Caja que contiene 36 piezas: 27 primas rectangulares como los del 4.º don, 6 divididos en dos cuadrados y 3 en 2 prismas.		Se continúan trabajando los mismos contenidos que en los dones 3.º y 4.º y, además, la noción de *cuerpo sólido*.
7	8 cuadrados iguales, otros dos más grandes divididos en cuatro partes.		Superficie. Líneas paralelas Vértices, diagonal Triángulo y sus elementos. Tipos de triángulos. Paralelogramo, trapecio, trapezoide. Fracciones: tercios, quintos, sextos, sétimos y octavos. Comparación de fracciones.
8	Un cuadrado entero, un cuadrado dividido en dos rectángulos iguales, otro en tres, otro en cuatro, otro en cinco, otro en seis, otro en siete y otro en ocho.		
9	21 figuras (cuadrados, rectángulos, triángulos rectángulos isósceles, triángulos rectángulos escalenos).	 	

Don	Descripción	Imagen	Contenidos matemáticos
10	Listones flexibles (25×1 cm) para trabajar geometría.		Línea horizontal, vertical. Líneas paralelas. Línea recta. Ángulos: agudo, recto, obtuso. Vértices. Noción de *triángulo*. Tipos de triángulos. Noción de *polígono*. Pentágono, hexágono, heptágono. Longitud.
11	Palillos rectos y redondos para trabajar aritmética.		Unidad, decena. Par, impar. Sumas de cifras de un dígito. Restas de cifras de un dígito. Multiplicación como suma repetida y división como reparto.
12	24 anillos o circunferencias y 48 semicírculos de alambre.		Línea curva. Noción de *círculo* y *circunferencia*. Semicircunferencia (reconocimiento).
13	Palitos de diferentes tamaños y colores y bolitas de ceras/pedacitos de corcho para unirlos.		Línea y punto. Construcción de figuras planas y cuerpos sólidos: hexaedro, octaedro, dodecaedro.
14	Arcilla e instrumentos para modelarla.		Construcción de esfera, cubo.

Nota. Originariamente el 7.º, 8.º y 9.º don estaba formado por 6 cuadrados iguales y del tamaño de las caras del cubo del 2.º don, triángulos rectángulos (isósceles y escalenos), acutángulos y obtusángulos. El 12.º don fue añadido posteriormente por la viuda de Fröbel.

En el manual se detalla cómo introducir en el aula de párvulos cada uno de estos dones para trabajar diversos contenidos, pues se recalca que estos no se adquieren con la simple manipulación del material. Por ejemplo, para trabajar los atributos color y forma (el primer contenido a introducir con los dones) se proponen las siguientes indicaciones para dar a los alumnos. En primer lugar, realizar preguntas tantas veces como sea necesario centradas en el color: «¿Tienen un mismo color todas las pelotas que hay dentro de esta caja? No, señor maestro, responderán los niños. ¿Qué color tiene esta? ¿Cuál esta otra? ¿De qué color es tu pelota?» (De Alcántara, 1879, p. 111). Cuando los escolares hayan aprendido a reconocer los colores, se continúa con el atributo forma. Para hacer que se centren en la forma y la distingan del color, se propone hacer comparaciones con la forma que tienen otros objetos conocidos como cajas, mesas, etc. «¿Se parece la pelota a este tintero? - ¿Y a esta caja? - ¿Tiene esquinas? - ¿Es larga? - ¿Es cuadrada? - ¿Cómo es? - etc.» (De Alcántara, 1879, p. 111). Una vez adquirido este conocimiento, se intercalan preguntas sobre el color y la forma.

Hay que destacar que el programa de esta formación no estaba enfocado a mejorar el conocimiento del contenido de los maestros en formación, si no a enseñar un método sobre cómo introducir los contenidos en el aula de párvulos.

3. El siglo XX

En el siglo XX llegaron a España otros métodos sobre la enseñanza de las matemáticas en Infantil, como el de Maria Montessori o el de Ovide Decroly. Sin embargo, la formación inicial de los maestros de esta etapa:

> [...] no evolucionó al mismo ritmo que el magisterio en general, pues las sucesivas modificaciones de los planes de estudios de las escuelas normales de 1898, 1900, 1901, 1903 y 1914 no mencionaron la necesidad o conveniencia de una formación específica para estos maestros. (Diego-Pérez y González, 2009, p. 374)

La formación de maestros de Infantil no formó parte de los planes de estudio de las escuelas normales hasta la segunda mitad del siglo, por lo que hasta entonces no hubo formación específica para estos profesionales. Solo en el plan de estudios de 1931 se introdujo la posibilidad de hacer prácticas en centros de párvulos, así como la posibilidad de hacer un trabajo centrado en esta etapa como parte de la asignatura Trabajos de Especialización (Diego-Pérez, 2013).

A comienzos de la segunda mitad del siglo, aunque no se reguló la formación inicial, se reglamentó una especialización para aquellos maestros que estaban trabajando en una escuela de párvulos a través de cursos concretos, como el de «Orientaciones pedagógicas para maestras nacionales de las Escuelas de Párvulos» o el «Curso de formación y capacitación de las Maestras Nacionales de las Escuelas de Párvulos y Maternales», u oposiciones para los maestros de otras especialidades que querían trabajar en escuelas de párvulos (Diego-Pérez y González, 2009).

3.1. Periodo de la Ley General de Educación

En la década de los setenta, con la Ley General de Educación (LGE), las Escuelas Normales se incorporaron a la universidad como Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de Educación General Básica, donde se formaban a los futuros maestros a través de las siguientes especialidades: Preescolar, Ciencias, Ciencias humanas, Filología y Educación Especial. A pesar de que la formación inicial estaba regulada y la mayoría de los docentes eran maestros formados en estas escuelas, la LGE estableció que era posible ejercer la docencia en Educación Preescolar (dejando de denominarse *párvulos*) y Educación General Básica solo con poseer del título de diplomado, ingeniero técnico o arquitecto técnico (Castro, 2011).

Para obtener la titulación, los futuros maestros debían cursar nueve asignaturas comunes a las cinco especialidades, donde se encontraba Matemáticas I y ocho asignaturas específicas de la especialidad correspondiente, que en el caso de Preescolar incluía El Área Lógico-Matemática en edad Preescolar (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 1977), pues la LGE promovía que los niños de preescolar realizasen ejercicios de lógica y prenuméricos:

> La educación preescolar comprende juegos, actividades de lenguaje, incluida, en su caso, la lengua nativa, expresión rítmica y plástica,

observación de la naturaleza, ejercicios lógicos y prenuméricos, desarrollo del sentido comunitario, principios religiosos y actitudes morales» (LGE, 1970, art. 14)

Estas asignaturas tenían una fuerte influencia de las teorías de la época, especialmente la teoría de conjuntos o las teorías del desarrollo cognitivo de Piaget, en donde el lenguaje, los conceptos numéricos o las operaciones lógicas de seriación y clasificación son fundamentales.

Específicamente, la asignatura Matemáticas I (asignatura común a todas las especialidades) se centraba en contenidos relativos a conjuntos y relaciones, correspondencias y aplicaciones, número natural y sistemas de numeraciones, aritmética, fracciones y decimales, magnitudes y su medida, geometría plana, geometría del espacio e iniciación a la estadística. Dos ejemplos de actividades para el tema de aritmética que debían de realizar los estudiantes en la Universidad de Granada se presentan a continuación:

a) Señala a tu juicio algunos de los errores que pueden cometerse en la definición de *adición*. Elabora una definición que te parezca más correcta. Compara la definición que has hecho con la que se obtiene a partir de la teoría de conjuntos. Señala los aspectos fundamentales en una definición correcta de adición.
b) Sustituir las letras por números para que tengan sentido las operaciones:

i) $$\begin{array}{r} AMOR \\ +\ AMOR \\ \underline{AMOR} \\ ODIO \end{array}$$

ii) $$\begin{array}{r} PCE \\ +\ \underline{PSUC} \\ URSS \end{array}$$

iii) $$\begin{array}{r} AMOR \\ \times\ \underline{\quad\quad Z} \\ ODIO \end{array}$$

La segunda asignatura que debían de cursar los futuros maestros de preescolar, El Área Lógico-Matemática en Edad Preescolar, era una asignatura específica de la especialidad. Sus contenidos estaban enfocados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en estas edades, incluyendo en su temario teorías del aprendizaje (p. ej.: conductista, cognitiva), materiales y recursos, el currículo de matemáticas en Educación Infantil (p. ej.: orientaciones ministeriales, evolución de aspectos curriculares) o nociones sobre didáctica de diversos temas como lógica (p. ej.: clasificaciones, seriaciones, etapas o estadios, lógica de clases), números (p. ej.: formación del concepto de *número* según Piaget, contextos numéricos, principios del conteo), aritmética (p. ej.: estrategias para sumar y restar, problemas aditivos), espacio (p. ej.: topología, desarrollo de las nociones espacio-temporales, etapas en el desarrollo espacial), geometría (p. ej.: aportaciones de Van Hiele) y medida y magnitudes (p. ej.: etapas generales, aportes de Piaget).

3.2. Periodo de la Ley de Reforma Universitaria

Durante el periodo de la Ley de Reforma Universitaria (oficialmente denominada Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria), vigente entre 1983 y el 13 de enero de 2002, se produce un nuevo impulso en la formación de los maestros, al equiparar las escuelas universitarias con el resto de los centros universitarios superiores pasando a denominarse en su mayoría *facultades de Educación*. No obstante, se mantiene el mismo estatus que anteriormente, estudios de primer ciclo o diplomaturas (3 años) en contraste con las licenciaturas (5 años). En la década de los noventa, las directrices nacionales (MEC, 1991) establecen las especialidades de Educación Infantil, Educación Primaria, Educación Musical, Educación Física, Educación Especial, Lengua extranjera y Audición y Lenguaje, con asignaturas impuestas por el ministerio, obligatorias y comunes para toda España (troncales comunes, troncales de especialidad, prácticum), y asignaturas específicas de cada facultad (obligatorias de universidad, optativas y libre elección).

En el caso del Título de Maestro con Especialidad en Educación Infantil los estudiantes debían cursar siete asignaturas comunes a todas las especialidades más otras siete troncales de especialidad, en donde encontramos la asignatura Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica, con 6 créditos y adscrita al área de conocimiento de Didáctica de la Matemática. Con relación al contenido de la asignatura, las directrices nacionales solo detallan que incluirá «contenidos, recursos metodológicos y materiales en el desarrollo del pensamiento matemático» (MEC, 1991, p. 33006). Aunque, según Ruiz (1997), citado por Penalva (1998), había un predominio de temas relacionados con el lenguaje matemático, el número y las operaciones aritméticas, así como contenidos de geometría y medida. Algunos ejemplos de actividades que debían de realizar los alumnos de la Universidad de Alicante según (Penalva, 1998) se presentan en la tabla 2:

Tabla 2. Actividades desarrolladas en la asignatura Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica (Penalva, 1998, pp. 126-127).

Tipo	Actividad
Desarrollo de contenidos	En el conjunto de los bloques lógicos de Dienes, se considera la relación «tener la misma forma y ser del mismo tamaño que». Comprueba que dicha relación es una relación binaria de equivalencia y describa la partición resultante.
Lecturas críticas y comprensivas	– Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. *Educación Matemática, 4*(2), 7-15. – Rico, L. (1995). *Conocimiento numérico y formación del profesorado*.
Resolución de problemas	– Calcule la suma de los cien primeros números naturales no nulos. ¿Qué vale la suma de los cien siguientes? – Antonio, Juan y Pedro van de excursión, Antonio lleva tres pizzas y Juan dos. Pedro que no lleva ninguna paga 900 pesetas. ¿Cómo se reparten Antonio y Juan las 900 pesetas, si las cinco pizzas costaron todas lo mismo y ninguno de los tres sale perjudicado comiendo todos lo mismo? (XI Torneo de Matemáticas, Sociedad Canaria Isaac Newton, 1995).
Propuesta didáctica	Actividad en grupo sobre el tema «El ordenador y la calculadora como instrumentos de aprendizaje de las Matemáticas». Los apartados a desarrollar son presentación, justificación de la propuesta, objetivos, contenidos, metodología, ventajas didácticas, dificultades de aprendizaje, actividades, recursos y materiales, y bibliografía.

Además de la asignatura Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica, en algunos casos existía una segunda de carácter obligatorio de universidad, como en la Universidad de Granada la asignatura Educación Matemática Infantil, o, en la Universidad de Alicante, de Aprendizaje de la Geometría.

4. El siglo XXI: periodo de La Ley Orgánica de Universidades

La Ley Orgánica 6/2001 de Universidades, aprobada el 20 de diciembre de 2001, reformó la estructura y el funcionamiento de la educación universitaria por el Parlamento español. Durante este periodo, se inició un proceso de cambio para adaptar la formación de maestros al Espacio Europeo de Educación Superior. Esto supuso modificaciones sustanciales, como que todas las titulaciones universitarias pasasen a ser grados de 4 años (por lo que se equipararon las antiguas diplomaturas y licenciaturas) o contemplar una perspectiva curricular basada en competencias que la sociedad reclama a los profesionales. Además, en este nuevo plan desaparecen las anteriores especialidades, simplificándolas a Grado de Educación Primaria (existiendo diversas menciones como Profundización en el currículo básico o Educación Física, las cuales dependen de cada universidad) y Grado de Educación Infantil.

A nivel nacional, las directrices establecen el número de créditos del título universitario y su reparto entre los distintos módulos: formación básica 100 ECTS[3] (Procesos educativos, aprendizaje y desarrollo de la personalidad, Dificultades de aprendizaje y trastornos del desarrollo, Sociedad, familia y escuela, Infancia, salud y alimentación, Organización del espacio escolar, materiales y habilidades docentes, Observación sistemática y análisis de contextos, La escuela de Educación Infantil), formación didáctico disciplinar 60 ECTS (Aprendizaje de las Ciencias de la Naturaleza, de las Ciencias Sociales y de la Matemática, Aprendizaje de Lenguas y Lectoescritura, Música, expresión plástica y corporal) y prácticum 50 ECTS (prácticas escolares, incluyendo el Trabajo Fin de Grado). Además, dentro de este nivel de concreción se establecen por el Ministerio de Educación y Ciencia (MEC) las competencias que han de adquirir los futuros maestros, entre las que se encuentran tres competencias relativas a su formación matemática (MEC, 2007, p. 53537):

3. Las siglas ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System) reflejan el sistema de créditos a través del trabajo que deberán completar los alumnos para poder superar su plan de estudios. Esta estimación también contempla el tiempo de estudio personal, tutorías, desarrollo de prácticas, proyectos, etc., aspectos no contemplados en el anterior sistema de créditos en que solo se tenía en cuenta la carga lectiva docente.

> Conocer los fundamentos científicos, matemáticos y tecnológicos del currículo de esta etapa, así como las teorías sobre la adquisición y desarrollo de los aprendizajes correspondientes. Conocer estrategias didácticas para desarrollar representaciones numéricas y nociones espaciales, geométricas y de desarrollo lógico. Comprender las matemáticas como conocimiento sociocultural.

A nivel institucional, las universidades concretan las directrices nacionales a través del diseño y la estructura del plan de estudios, así como los descriptores y créditos propios de cada materia. En este sentido, las universidades tienen mayor libertad que en planes anteriores. Por ejemplo, en el caso de la formación matemática, a nivel nacional solo se delimita que se han de repartir 60 ECTS entre los distintos módulos didáctico disciplinares, y algunas competencias generales, por lo que cada universidad establece tanto el número de asignaturas como su diseño. Esto provoca que, aunque la titulación haya aumentado en número de años y créditos, la formación matemática se ha visto mermada con respecto a los planes anteriores.

5. Conclusiones

En España, la formación de los maestros encargados de la educación de los niños menores de 6 años ha tenido un largo y lento crecimiento (Diego-Pérez y González, 2009). En diversas ocasiones a lo largo de la historia, no ha sido reconocida a nivel oficial como lo ha sido la formación de maestros de Educación Primaria. Este hecho sumado a ciertas concepciones erróneas como que cualquier persona medianamente culta puede impartir las matemáticas en Infantil o que los niños en estas edades no tienen capacidad para adquirir conocimiento matemático (Castro y Castro, 2016) ha provocado que la formación en áreas específicas, como la Didáctica de la Matemática, haya tenido escasa presencia.

En general, la formación matemática de los maestros de Infantil ha estado influenciada por los movimientos de la época como el método de Fröbel en el siglo XIX o las teorías de Piaget en la segunda mitad del siglo XX. Actualmente, a diferencia de planes anteriores, como el plan del 71 o del 92, donde las directrices nacionales delimitaban las asignaturas del área a impartir y sus créditos, las directrices son demasiado abiertas y cada universidad tiene libertad para determinar el tipo de asignatura y los créditos correspondientes, por lo que la formación matemática de los maestros de Educación Infantil depende de la universidad en la que se haya obtenido el título universitario.

6. Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo del proyecto PCG2018-095765-B-100 del Plan Nacional de I+D+i del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades (España).

7. Referencias

De Alcántara, P. (1879). *Manual teórico-práctico de educación de párvulos según el método de jardines de infancia de F. Fröbel*. Imprenta del Colegio Nacional de Sordo-Mudos y de Ciegos.

Castro, E. (2011). *Proyecto docente para optar a la plaza de Catedrático de Universidad*, código 5/5/2011. Universidad de Granada.

Castro, E. y Castro, E. (2016). Matemáticas en educación infantil. En: Castro, E. y Castro, E. (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil* (pp. 19-41). Pirámide.

Colmenar, C. (1989). La formación de maestras en el método educativo de Fröbel en España. *Revista de educación*, *290*, 135-158.

Colmenar, C. (2010). Las escuelas de párvulos en España durante el siglo XIX: Su desarrollo en la época de la Restauración. *Historia de la Educación*, *10*, 89-105.

Diego-Pérez, C. (2013). La con-formación de la profesión de maestro en educación infantil. *Tabanque: Revista pedagógica*, 26, 55-70.

Diego-Pérez, C. y González, M. (2009). La cualificación profesional de los educadores infantiles en España desde 1857 hasta 1970. En: *El largo camino hacia una educación inclusiva: la educación especial y social del siglo XIX a nuestros días*. XV Coloquio de Historia de la Educación, Pamplona-Iruñea, 29, 30 de junio y 1 de julio de 2009 (pp. 371-380). Universidad Pública de Navarra.

Flores, P. y Rico, L. (2015) (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. Pirámide.

Jefatura del Estado (1970). Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa. *Boletín Oficial del Estado*, *187*, 12525-12546.
Jefatura del Estado (1983). Ley Orgánica 11/1983, de 25 de agosto, de Reforma Universitaria. Boletín Oficial del Estado, 209, 24034-24042.
Lahoz, P. (1991). El modelo froebeliano de espacio-escuela. Su introducción en España. *Historia de la Educación*, 10, 107-133.
Ministerio de Educación y Ciencia (1977). Orden de 13 de junio de 1977 sobre directrices para la elaboración de los planes de estudio de las Escuelas Universitarias del Profesorado de Educación General Básica, *Boletín Oficial del Estado*, *151*, 14256-14257.
Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Real Decreto 1440/1991, del 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestro, en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. *Boletín Oficial del Estado*, 244, 33003-33018.
Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Orden ECI/3854/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Infantil. *Boletín Oficial del Estado*, *312*, 53735-53738.
Penalva, M. C. (1998). *Formación de profesores de educación infantil. Didáctica de las Matemáticas*. Universidad de Alicante.
Segovia, I. y Rico, L. (2011) (coords.). *Matemáticas para maestros de educación primaria*. Pirámide.

9

Modificación de una tarea de un libro de texto sobre longitud por futuros maestros de Educación Primaria

Textbook Task Modification on Length by Prospective Primary Teachers

José A. Fernández-Plaza y Esperanza López Centella
Universidad de Granada

Resumen
En este capítulo estudiamos los modos en que futuros maestros de Educación Primaria transforman una tarea sobre longitud, procedente de un libro de texto, en una secuencia de tareas sobre dicho tópico. Para ello, analizamos las respuestas de 35 estudiantes del tercer curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada a un cuestionario en soporte papel diseñado con este fin. Con base en un sistema de categorías inspirado en el Análisis de Instrucción del Análisis Didáctico y en estudios previos, caracterizamos las propuestas de tareas de los estudiantes en términos de las acciones que involucran, discutimos la correspondencia entre estas y las metas de tarea declaradas por ellos, y describimos las debilidades en el planteamiento de dichas tareas.

Palabras clave: diseño de tareas, futuros maestros de Educación Primaria, longitud, errores

Abstract
In this chapter we study the ways in which future Primary Education teachers transform a task on length, from a textbook, into a sequence of tasks on that topic. We analysed the responses of 35 students in the third year of the Degree in Primary Education at the University of Granada to a pencil and paper-based questionnaire designed for this purpose. Based on a category system inspired by the Instructional Analysis of Didactic Analysis and in previous studies, we characterize the students' task proposals in terms of the actions they involve, we discuss the correspondence between these task and the task goals declared by the students, and we describe the weaknesses in the design of these tasks.

Keywords: task design, prospective primary education teachers, length, mistakes

1. Introducción

Entre las competencias profesionales del profesorado de matemáticas de cualquier nivel educativo destaca, por su particular importancia, aquella para la selección, diseño y modificación de tareas. En ella intervienen las cinco componentes del Análisis Didáctico (Lupiáñez y Rico, 2008; Marín, 2013): el análisis conceptual, el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de evaluación. En particular, la formación y el ejercicio del futuro profesorado de Educación Primaria en la modificación de tareas de libro de texto contribuye a su propio distanciamiento de la praxis de uso pasivo de dicho recurso como fuente exclusiva de tareas (Lee *et al.*, 2019; Thompson, 2012). Esto favorece la percepción de sí mismo como profesional reflexivo y crítico (Flores, 2007; Jones y Pepin, 2016), con capacidad y autonomía para adaptar y diseñar propuestas educativas según sus objetivos didácticos, convenientemente orientados al desarrollo del sentido matemático (Ruiz-Hidalgo *et al.*, 2019). En este capítulo presentamos una investigación cualitativa, de carácter descriptivo y exploratorio, sobre los modos en que futuros maestros de Educación Primaria transforman una tarea sobre longitud, procedente de un libro de texto (Alonso *et al.*, 2015), en una secuencia de tareas sobre dicho tópico. Para ello establecemos los siguientes objetivos específicos de investigación:

1. Identificar las acciones demandadas por los futuros maestros de Educación Primaria en sus propuestas de tareas a partir de la tarea presentada.
2. Describir las deficiencias y errores cometidos en sus propuestas.
3. Estudiar el grado de coherencia entre las acciones de las tareas propuestas y los objetivos declarados en ellas.

2. Antecedentes y marco teórico

A continuación, presentamos los conceptos clave de nuestro estudio: *análisis didáctico*, *tareas y modificación de tareas*, *deficiencias en el diseño de tareas* y *sentido de la medida*.

2.1. Análisis didáctico

Siguiendo la definición de Rico (2016), entendemos *por análisis didáctico de un contenido matemático escolar*:

> [...] un método para escudriñar, estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, los contenidos didácticos de las matemáticas escolares, con el propósito de su planificación, su implementación en el aula y su evaluación. (p. 95)

De los cinco análisis (conceptual, de contenido, cognitivo, de instrucción y evaluativo) que vertebran este método, es el análisis de instrucción el destinado a la planificación e implementación de la enseñanza de las matemáticas a través de la selección y el diseño de tareas y secuencias didácticas, de la organización del trabajo en el aula y del uso de materiales y recursos. En particular, centramos la atención en el diseño y modificación de tareas matemáticas escolares al resultar de crucial importancia en el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.

2.2. Tarea y modificación de tareas

De acuerdo con Moreno y Ramírez (2016):

> Una tarea escolar es una propuesta para el alumno, que solicita su actividad en relación con las matemáticas y que el profesor planifica como oferta intencional para el aprendizaje o como instrumento para evaluación del aprendizaje. (p. 244)

Una tarea queda caracterizada por su formulación, objetivos didácticos o meta, contexto, materiales y recursos, agrupamientos, temporalidad, complejidad, etc. (Gómez y Romero, 2015).

Bajo la consideración de diversas investigaciones sobre modificación de tareas (Fernández-Plaza y Cañadas, 2019; Gómez y

Romero, 2015; Jones y Pepin, 2016; Lee *et al.*, 2019; Thompson, 2012), en este estudio concebimos la *modificación* de una tarea como la obtención de una nueva tarea a partir de la alteración y preservación de uno o más elementos de la primera.

2.3. Deficiencias en el diseño de tareas

En este trabajo entendemos por *deficiencias de tarea* aquellos errores (incorrecciones observables) en su diseño que ponen de relieve concepciones, aproximaciones didácticas o comunicativas equivocadas o inapropiadas. Según su naturaleza, distinguimos: *errores conceptuales*, referidos al dominio del contenido matemático, a saber: nociones, procedimientos, relaciones y aplicaciones; *errores didácticos*, referidos al diseño, planteamiento y formulación de la tarea, la suficiencia de la información proporcionada en ella para abordar sus cuestiones, la idoneidad del orden de sus enunciados, la correspondencia entre los objetivos y la meta de la tarea declarados y la adecuación de las representaciones utilizadas en su enunciado; y *errores de expresión,* aquellos relacionados con el lenguaje empleado en la comunicación de conceptos e ideas, su desambiguación y uso de vocabulario apropiado.

2.4. El sentido de la medida

En el marco del *sentido matemático*, que expresa y concreta las formas de conocer, comprender y usar en contexto las matemáticas elementales de cada bloque curricular (Lupiáñez y Rico, 2008), entendemos el *sentido de la medida* (Moreno *et al.*, 2015) como los diversos procesos cognitivos implicados en la medición de una magnitud. Este se caracteriza a través de sus componentes: *reconocimiento de cualidades comparables y medibles* (comparación y ordenación de objetos según sus cualidades medibles, establecimiento de equivalencias), *comprensión del proceso de medir* (selección de la unidad de medida, uso de unidades estándares y no estándares, utilización de instrumentos de medida) y *desarrollo de estrategias de estimación y aproximación de medida*.

3. Método

Se trata de una investigación cualitativa, de carácter exploratorio y descriptivo (Erickson, 1986). A continuación, precisamos las características particulares del método.

3.1. Participantes

En este estudio han participado 35 estudiantes del tercer curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Granada, seleccionados de manera intencional. Con anterioridad al desarrollo del estudio, los participantes habían recibido formación sobre el diseño de tareas matemáticas y la enseñanza y aprendizaje de magnitudes (Gómez y Romero, 2015; Moreno *et al.*, 2015) en el marco del plan de estudios de dicha titulación universitaria.

3.2. Diseño del cuestionario y recogida de datos

Dentro de una investigación más amplia, se diseñó el cuestionario de tres ítems mostrado en la figura 1. Este fue presentado en formato papel a los participantes bajo la instrucción de completarlo de manera individual durante una sesión de 2,5 horas en el curso académico 2017-2018.

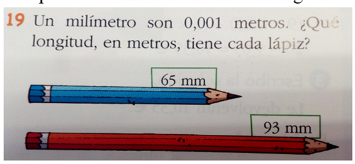
De acuerdo con los objetivos de investigación del presente trabajo, analizamos las producciones escritas de los participantes en respuesta al ítem *c* del cuestionario, sobre la modificación de la tarea presentada (extraída de Alonso *et al.*, 2015, p. 79).

4. Análisis de datos

Con el fin de garantizar la anonimidad del alumnado participante en el estudio se han empleado las etiquetas E*i* con *i* = 1,...,35 para referir a sus producciones. De las 35 producciones de los participantes, se registró una completamente en blanco (E09). El método de análisis de datos empleado es el análisis de contenido, considerando como unidades de análisis los términos clave e imágenes presentes en las producciones escritas de los participantes.

Las dimensiones que hemos analizado de las producciones son las acciones involucradas en las tareas, las deficiencias en la formulación de estas, y la coherencia entre las acciones y los objetivos de aprendizaje declarados en las tareas. Este análisis se lleva a cabo con base en un sistema de categorías *a priori* de las acciones de tarea, inspiradas en las componentes del sentido de la medida (Moreno *et al.*, 2015), y de un sistema de categorías establecidas *a posteriori* de las deficiencias y la coherencia.

En un libro de texto para 6º de primaria se ha seleccionado la siguiente actividad:



(Tarea extraída de Alonso, Bernal, Ferrero y Martín (2015, p. 79))

a) Resuelve la actividad.

b) ¿Cuál de los siguientes enunciados describe mejor la meta de la actividad? Marca la opción y justifica tu respuesta.

☐ Emplear la regla para medir longitudes de objetos.

☐ Identificar la unidad de medida adecuada para expresar la longitud de un objeto.

☐ Transformar unas unidades de longitud en otras mediante las equivalencias usuales.

☐ Estimar la longitud de objetos.

☐ Transformar unas unidades de longitud en otras mediante las equivalencias usuales, una vez identificada la unidad de medida adecuada.

c) Modifica la actividad para diseñar una lección de 45 minutos en términos de meta, formulación, materiales y recursos, agrupamientos, interacciones, temporalización, función, situaciones, complejidad.

Figura 1. Cuestionario presentado a los participantes.

4.1. Acciones demandadas en las tareas

Se han considerado únicamente aquellas acciones expresadas desde la perspectiva del docente y enunciadas de forma explícita por los participantes en sus producciones escritas (o derivadas directamente de sus explicaciones en los distintos elementos de la tarea). Algunas categorías son divididas en subcategorías no necesariamente excluyentes. A continuación, se describen y ejemplifican, a través de producciones particulares, las acciones identificadas bajo estos criterios.

- *Medir longitudes con referencia al objeto medido (objetos tangibles, ilustraciones de objetos o distancias)* [codificado como Medir (Tipo de objeto)]. Ejemplo: «Medición de varios objetos de la clase (largo y ancho de un pupitre, mesa del profesor, del marco de la puerta, del aula, de la pista de fútbol sala)» (E17).
- *Medir longitudes con referencia al instrumento de medida (estandarizado o no)* [Medir (Instrumento)]. Ejemplos: «Coge tu regla y mide dos objetos que tengas cerca. ¿Cuánto miden en metros?» (E01) / «Mide la longitud de la mesa teniendo como unidad de medida tu lápiz» (E02).
- *Seleccionar instrumentos de medida de longitud (estandarizado o no)* [Seleccionar instrumentos]. Ejemplo: «¿Qué utensilio utilizamos para medir un bolígrafo? ¿Qué utensilio utilizamos para medirnos?» (E07).
- *Seleccionar unidades de longitud (estándares o no estándares)* [Seleccionar unidades de medida]. Ejemplo: «Indica, en cada caso, qué unidad de medida elegirías para medir los siguientes objetos: metro, centímetro, decímetro o milímetro. 1. Lápiz, 2. Tu clase, 3. Tu sacapuntas, 4. Pata de la mesa» (E12).
- *Convertir unidades de longitud (en contexto o descontextualizadas)* [Convertir unidades de medida]. Ejemplo: «Transformar las unidades de longitud a las indicadas, sabiendo que 1 metro son 1000 milímetros: 5 m = ... mm; 10 dm = ... m; 30 cm = ... dm; 48 mm = ... cm; 83 cm = ... m; 21 mm = ... dm; 65 m = ... cm» (E04).
- *Estimar longitudes de objetos* [Estimar]. Ejemplo: «Estima la longitud de los siguientes objetos de la clase: alto de la silla, largo de la pizarra, alto de la papelera» (E05).
- *Comparar objetos reales o sus representaciones según sus medidas de longitud* [Comparar]. Ejemplo: «María compró un lápiz a principio de curso que medía 13 mm y su amiga tenía otro lápiz que medía 0,009 m. ¿Qué lápiz mide más? Compara ahora tu lápiz y el de tu compañera y mídelos» (E11).
- *Identificar unidades de medida en un texto escrito* [Unidades de medida en textos]. Ejemplo: «En esta actividad vamos a leer una historia donde se emplean situaciones reales de las unidades de longitud. De esta manera se familiarizan con las unidades y van viendo qué elementos son los más adecuados para usar una unidad u otra. *Juan anda 2 km hasta el colegio, en*

su clase de matemáticas usa una regla de 30 cm para medir la longitud de un lápiz. Al día siguiente usan un metro para medirse entre ellos. Juan al descubrir las unidades de longitud comienza a contar cuántos pasos hay hasta su casa. ¿Qué unidades de medida han aparecido en el texto?» (E07).

- *Diseñar/Proponer.* Esta categoría se subdivide en:
  - Objetos/itinerarios de longitud comprendida en un intervalo. Ejemplo: «Pon ejemplo de objetos que puedan tener dichas medidas: 163 mm, 0,7 m, 13 cm, 24,2 cm, 129 m, 1,73 m, 33 cm» (E12). / «Ahora, diseña tu propio lápiz, que sea mayor que el lápiz 1 y menor que el lápiz 2» [Refiriéndose a los dos lápices representados en la tarea original] (E25).
  - Situaciones relacionadas con unidades de medida de longitud. Ejemplo: «Haría un debate con explicación visual, gráfica u oral de cada grupo explicando su ejercicio y cómo pueden ellos mostrarme que lo han entendido con ejemplos que ellos se inventen usando la unidad de medida de forma correcta» (E13).
  - Instrumento de medida. Ejemplo: «Se le pedirá a cada uno de los alumnos que traigan a clase una cuerda fina de unos 2 o 3 metros de longitud fácil de manejar. También si es posible una regla para medir lo más larga posible. Al principio de la actividad deberán convertir el cordón en una regla casera marcando a lo largo de este una recta numérica para así poderlo utilizar como objeto de medida» (E23).
- *Representar.* Esta categoría se subdivide en:
  - Unidades de medida en escalera. Ejemplo: «Escribe la escalera de medidas y encuentra una relación que hay para pasar de una unidad a otra» (E19).
  - Valores de medidas en recta numérica. Ejemplo: «Tendrán que representar en la recta numérica algunas de las medidas que antes les hemos mostrado, y algunas más. Posteriormente tendrán que comparar las rectas numéricas y decidir cuál es la más adecuada para representar las longitudes aportadas por el profesor» (E13).
- *Operar con medidas de longitud*. Esta categoría se subdivide en:
  - Sumar. Ejemplo: «Un metro son 1000 mm. Teniendo en cuenta que el lápiz b mide 50 mm más que el a. ¿Cuántos metros mide el lápiz b?» (E28).

– Restar. Ejemplo: «Antonio medía en 2015 120 cm y en 2018 128 cm. ¿Cuántos cm ha crecido Antonio?» (E11).
– Expresar una medida de longitud en forma compleja. Ejemplo: «Cuando el profesor dice una longitud los alumnos deben representarla, en la tabla y con las fichas de números. Ejemplo: 230 mm, 2 m – 3 cm – 0 mm» (E01).
– Disminuir el error de medida. Ejemplo: «Con la información proporcionada en el libro, ¿cuántos lápices del estilo o medida 2 mide tu cuerpo? ¿En qué medida lo expresarías? ¿Qué lápiz usaríamos para medir algo con mayor exactitud? Explica por qué» (E10).

4.2. Deficiencias identificadas en el diseño de tareas

Respecto al análisis de errores y deficiencias en el diseño de las tareas, se establecieron tres grandes categorías:

- *Errores conceptuales*
  – Concepción errónea sobre la idoneidad de uso de unidades de medida. Ejemplo: «Pon ejemplos para utilizar la medida en mm. Debate con tus compañeros por qué es mejor medir en metros» (E16). Propuesta de solución por dicha participante: «Medida de la longitud de una hormiga. Es mejor medir en metros, porque es la medida del sistema internacional».
  – Confusión de conceptos como el de *escala en el plano* con el de *equivalencia entre unidades de medida de longitud*. Ejemplo: «*a*) Imagina que este es el plano de tu ciudad y quieres saber la distancia que recorres cuando vas al colegio. ¿Cómo lo harías? Un centímetro en el mapa son 10 metros en la realidad» (E34).
  – Uso de unidad de medida incorrecta para la magnitud indicada. Ejemplo: «¿Cuál es el perímetro y área de tu mesa? Expresa el resultado en metros» (E23).
  – Error en la conversión de unidades de medida de longitud. Ejemplo: «Un metro son 0,01 cm, mide a tu compañero y apunta su longitud en metros. Compañero Daniel = 1,37 m = 0,0137 cm» (E07).
  – Arbitrariedad en el establecimiento de equivalencias entre unidades de medida de longitud. Ejemplo: «Un milímetro

son 0,001 m, ¿qué longitud en metros tiene cada lápiz? (a) ¿Y si son 0,003 metros? ¿Qué longitud sería?» (E21).

- No precisar la dimensión a la que refiere la medida de longitud de un objeto. Ejemplo: «Se presentan delante de la clase diferentes cosas como un lápiz, una regla de 15 cm, la longitud de un libro, la longitud de una mesa, la longitud de una goma» (E20).
- No precisar la magnitud a la que refiere una medida. Ejemplo: «¿Qué utensilio utilizamos para medir un bolígrafo? ¿Qué utensilio utilizamos para medirnos?» (E07) / «Compara que objetos es el mayor entre los siguientes» (E29).
- Ignorar el efecto de la disposición de los objetos en la medida de longitudes conjuntas. Ejemplo: «¿Qué objeto será más largo en decímetros, el lápiz y el bolígrafo juntos o la calculadora y el sacapuntas juntos?» (E09).

• *Errores didácticos*
  - Cambios de unidades poco apropiados. Ejemplo: «Medir el perchero y lo deberán pasar a km» (E26).
  - Información/instrucciones insuficientes. Ejemplo: «Con la ayuda del plano del centro, busca las figuras marcadas y mide con la ayuda de una cinta métrica el largo de cada figura» [No se proporciona ningún plano ni información acerca de las figuras mencionadas] (E32).
  - Orden inapropiado de enunciados. Ejemplo: «1. Usa una regla para medir: el libro de matemáticas; el lápiz; la agenda. 2. Estima sin usar la regla y compruébalo posteriormente» (E14).
  - Asignación de medidas poco realistas a objetos cotidianos. Ejemplo: «¿Qué longitud tiene cada objeto?» [Se muestra el dibujo de una calculadora con una cota de 8 dm de largo] (E04).
  - Error en el orden (según orden de magnitud) de las unidades de longitud del Sistema Internacional de Unidades en su «representación en escalera». Ejemplo: «Realiza en tu cuaderno la escala de unidades de medida. Solución: mm - dm - cm - m - dam - hm - km» (E33).
  - Inadvertir la suficiencia de una única relación entre dos unidades de medida de longitud para establecer su equivalencia. Ejemplo: «Un milímetro son 0,001 metros y 10 mm

son 0,010 metros. ¿Qué longitud, en metros y centímetros, tiene cada lápiz?» (E22).

- No usar la escala natural en la representación de un objeto siendo posible. Ejemplo: «Antonio tiene un lápiz que mide 0,085 metros y Juan tiene un bolígrafo que mide 85 mm. ¿Cuál de los dos objetos tiene mayor longitud?» [Se muestra un dibujo de ambos lápices, con una largura de unos 3 cm cada uno, con las respectivas cotas de sus larguras, de 0,085 m y 85 mm] (E31).
- Incoherencia entre la meta y la acción declaradas en la tarea. Esta categoría será descrita en detalle en el estudio del grado de coherencia mostrado en la siguiente sección.

• *Errores de expresión*
  - Comunicación imprecisa de idea. Ejemplo: «A la hora de medir el cuerpo, lo haríamos con la regla, pero usando la medida del lápiz» (E10).
  - Uso de término inapropiado. Ejemplo: «Calcularemos su longitud con una regla» (E30).

4.3. Coherencia entre las acciones demandadas y los objetivos declarados en las tareas

Se han empleado los siguientes descriptores (refiriendo a los objetivos satisfechos por las acciones): *coherencia plena* (las acciones propuestas satisfacen todos los objetivos didácticos declarados y ninguno más); *satisfacción de los objetivos declarados y objetivos no declarados* (las acciones propuestas satisfacen todos los objetivos didácticos declarados y otros no declarados); *satisfacción de solo algunos de los objetivos declarados* (las acciones propuestas satisfacen algunos, pero no todos los objetivos didácticos declarados); *satisfacción de objetivos no declarados y solo algunos de los objetivos declarados* (las acciones propuestas satisfacen algunos, pero no todos los objetivos didácticos declarados y otros no declarados) y *coherencia nula* (las acciones propuestas no satisfacen ninguno de los objetivos didácticos declarados). Por razones de espacio, se han omitido ejemplos de cada una de estas categorías.

5. Resultados y discusión

A continuación, presentamos los resultados del estudio organizados en tres secciones correspondientes a nuestros objetivos de investigación: la identificación de acciones demandadas en las tareas, la descripción de errores cometidos en su diseño y el estudio de la coherencia entre las acciones y los objetivos de tarea declarados en ellas. Las frecuencias absolutas y relativas sobre las acciones y deficiencias indicadas refieren al total de participantes (cada una es contada, en su caso y a lo sumo, una sola vez, con independencia del número de veces que sea evidenciada en la producción de un mismo participante).

5.1. Acciones de tarea identificadas

Como reflejan los datos de la tabla 1, de un total de 35 participantes, la acción más demandada en las propuestas de modificación de la tarea presentada y de diseño de una lección sobre longitud es la conversión de unidades de longitud (26). La mayor parte de ellos (26) proporcionó un contexto para las conversiones y solo algunos (6) solicitaron cambios de unidades en medidas de longitud descontextualizadas. En segundo lugar, destaca la medición, bien referida al tipo de objeto (22) o al instrumento de medida (20), tratándose en su mayoría de mediciones estandarizadas (19) y de longitudes de objetos cotidianos (18). No obstante, también hay quienes proponen modos no estandarizados de medir (6) y la medida de distancias en el exterior (4), así como de longitudes determinadas de ilustraciones (3). Frecuentemente, tanto la unidad de medida como el instrumento para llevarla a cabo son indicados por los participantes en sus enunciados de tareas. La selección de la unidad más adecuada es demandada únicamente por 11 participantes, reduciéndose a 3 la cantidad de participantes que solicita reflexión sobre la selección del instrumento de medida. La comparación de medidas también alcanza una considerable cuota de representatividad (12) en las producciones de los participantes. En todos los casos se trata de comparación numérica de medidas de objetos (6) o de representaciones pictóricas de estos (8), llamando la atención la ausencia de comparación de medidas de forma visual. Las operaciones de suma y resta de medidas (3 y 6, respectivamente) suelen hacer aparición en forma de problemas aditivos de comparación donde las cantidades involucradas son medidas de longitud. Acciones de carácter más abierto como el diseño y propuesta de objetos o itinerarios de longitud comprendida en un intervalo resultan menos evidenciadas (7).

Tabla 1. Acciones identificadas en las tareas diseñadas por los futuros maestros.

Categoría	**Subcategoría**	**Frecuencia y porcentaje (N = 35)**	
Medir (Tipo de objeto)	Ilustraciones	3 (8,6 %)	22 (62,9 %)
	Objetos cotidianos/Personas	18 (51,4 %)	
	Distancias	4 (11,4 %)	
Medir (Instrumento)	Estandarizado	19 (54,3 %)	20 (57,1 %)
	No estandarizado	6 (14,3 %)	
Seleccionar instrumentos	Estandarizados	2 (5,7 %)	3 (8,6 %)
	No estandarizados	2 (5,7 %)	
Seleccionar unidad de medida	Estandarizada	10 (28,6 %)	11 (31,4 %)
	No Estandarizada	3 (8,6 %)	
Convertir unidades de medida	Contextualizadas	27 (77,2 %)	26 (74,3)
	No contextualizadas	6 (17,1 %)	
Estimar	Objetos cotidianos	6 (17,1 %)	6 (17,1 %)
Comparar	Objeto real	6 (17,1 %)	12 (34,3 %)
	Representaciones pictóricas	8 (22,9 %)	
Identificar	Unidades de medida en textos	1 (2,9 %)	1 (2,9 %)

Diseñar/Proponer	Objetos/itinerarios de longitud dada o comprendida en intervalo	5 (14,3 %)	7 (20 %)
	Situaciones relacionadas con unidades de medida de longitud	1 (2,9 %)	
	Instrumentos de medida	1 (2,9 %)	
Representar	Unidades de medida en escalera	5 (14,3 %)	6 (17,1 %)
	Recta numérica	1 (2,9 %)	
Operar	Suma	3 (8,6 %)	10 (28,6 %)
	Resta	6 (17,1 %)	
	Error de medida	1 (2,9 %)	
	Descomponer	1 (2,9 %)	

5.2. Deficiencias de tarea identificadas

Como se aprecia en la tabla 2, las deficiencias más frecuentes en las tareas de los participantes son de tipo didáctico y conceptual, cometiendo más de la mitad de los participantes errores de cada uno de estos tipos. Entre los errores conceptuales, predomina la omisión de la dimensión de longitud del objeto al que refiere una medición o intención de medir, ligado en numerosas ocasiones a la omisión de la magnitud misma a la que refiere la acción de medir. Con relación a los errores didácticos, destaca la consideración de unidades poco apropiadas en las conversiones de unidades referidas a longitudes contextualizadas, así como la insuficiencia de la información provista en la formulación de la tarea para dar respuesta a las cuestiones planteadas. Respecto a los errores lingüísticos, resalta la imprecisión en el lenguaje empleado en los enunciados de las tareas.

Tabla 2. Deficiencias identificadas en las tareas planteadas por los participantes.

Categoría	Subcategoría	Frecuencia y porcentaje (N = 35)
Conceptual 19 (54,3 %)	No precisar la dimensión de medida de longitud	11 (31,4 %)
	No precisar la magnitud de medida	10 (28,6 %)
	Arbitrariedad en el establecimiento de equivalencias	3 (8,6 %)
	Error en la conversión de unidades de medida	2 (5,7 %)
	Concepción errónea sobre la idoneidad de uso de unidades de medida	1 (2,9 %)
	Confusión de conceptos (*escala* y *equivalencia de unidades*)	1 (2,9 %)
	Unidad de medida incorrecta para la magnitud indicada	1 (2,9 %)
	Ignorar el efecto de la disposición de los objetos en la medida de longitudes conjuntas	1 (2,9 %)
Didáctico 20 (57,1 %)	Conversiones entre unidades poco apropiadas	8 (22,9 %)
	Información/Instrucciones insuficientes	5 (14,3 %)
	Asignación de medidas poco realistas a objetos cotidianos	4 (11,4 %)
	Inadvertir equivalencia entre igualdades de medida	2 (5,7 %)
	Orden inapropiado de enunciados	1 (2,9 %)
	No usar escala natural en una representación siendo posible	1 (2,9 %)
	Incoherencia entre acción y objetivos de tarea declarados	25 (71,4 %)
	Error en el orden de unidades de medida (escalera)	1 (2,9 %)
Lingüístico 13 (37,1 %)	Error de expresión	5 (14,3 %)
	Vocabulario impreciso	5 (14,3 %)
	Término inapropiado	5 (14,3 %)

5.3. Coherencia observada entre los objetivos y las acciones de tareas

Los datos de la tabla 3 reflejan que casi tres cuartas partes de los participantes evidenciaron algún grado de incoherencia entre los objetivos declarados y las acciones demandadas, reduciéndose a un cuarto la parte de participantes que mostró una coherencia plena entre ellos. Dado que en sus producciones plantean, en primer lugar, los objetivos y, en segundo, los enunciados de sus tareas, este resultado apela a su capacidad para ajustar el diseño de la tarea a sus intenciones didácticas y reconocer la correspondencia entre las acciones demandadas y los objetivos sobre los que estas trabajan.

Tabla 3. Coherencia entre acciones y objetivos específicos declarados

Categoría	Frecuencia y porcentaje (N = 35)
Coherencia plena	9 (25,7 %)
Declarados y no declarados	11 (31,4 %)
Solo algunos declarados	5 (14,3 %)
Solo algunos declarados y no declarados	6 (17,1 %)
Coherencia nula	3 (8,6 %)

6. Conclusiones

En este capítulo hemos analizado cualitativamente las tareas propuestas por futuros maestros con base en la modificación de una tarea sobre longitud procedente de un libro de texto, basando nuestro análisis en las acciones demandadas en las tareas, las deficiencias en su diseño y el grado de coherencia entre los objetivos declarados y las acciones. En relación con la primera de estas dimensiones, destacamos la diversidad de acciones didácticas implicadas en la formulación de las tareas. La frecuencia de cada una de ellas revela un énfasis por parte de los participantes en acciones de carácter procedimental («medir») o algorítmico («convertir unidades»), predominando sobre aquellas de mayor carácter reflexivo y creativo («diseñar itinerarios de longitud dada»). En segundo lugar, el examen de las deficiencias nos ha permitido describir errores conceptuales, didácticos y de expresión que ponen de relieve carencias en los contenidos matemáticos acerca de la medida y de la magnitud longitud, así como de su didáctica. Estos manifiestan la necesidad de una especial atención al diseño de tareas en la formación de futuros docentes de Educación Primaria. Por último, con relación al grado de coherencia entre los objetivos didácticos indicados por los participantes y las acciones demandadas en sus tareas, detectamos algún tipo de incoherencia en la mayoría de las propuestas. Cabe mencionar, además, la dificultad evidenciada por algunos participantes para distinguir un objetivo de aprendizaje de un objetivo de enseñanza (DeLong *et al.*, 2005), jugando esta distinción un papel fundamental en la competencia profesional del profesorado.

7. Agradecimientos

Trabajo realizado con el apoyo de los proyectos PCG2018-095765-B-I00 y PID2021-128261NB-I00, del Plan Nacional de I+D+i (MICIN) y del Grupo FQM-193 «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación.

8. Referencias

Alonso, G., Bernal, E. I., Ferrero, L. y Martín, P. (2015). *Matemáticas 6 Primaria*. Anaya.

DeLong, M., Winter, D. y Yackel, C. A. (2005). Mental maps and learning objectives: The fast-slow algorithm for creating student learning objectives. *PRIMUS: problems, resources, and issues in mathematics undergraduate studies*, *15*(4), 307-338. https://doi.org/10.1080/10511970508984126

Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. En: Wittrock, M. C. (ed.). *Handbook of research on teaching* (pp. 119-161). Macmillan.

Fernández-Plaza, J. A. y Cañadas, G. R. (2019). Modificación de tareas de porcentajes por futuros maestros de Educación Primaria. En: Alonso, S., Romero, J. M., Rodríguez-Jiménez, C. y Sola, J. M. (eds.).

Investigación, Innovación docente y TIC: Nuevos Horizontes Educativos (pp. 741-753). Dykinson.

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA, 1*(4), 139-158.

Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares. En: Flores, P. y Rico, L. (eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 61-88). Pirámide.

Jones, K. y Pepin, B. (2016). Research on mathematics teachers as partners in task design. *Journal of Mathematics Teacher Education, 19*(2-3), 105-122. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9345-z

Lee, E. J., Lee, K. H. y Park, M. (2019). Developing Preservice Teachers' Abilities to Modify Mathematical Task: Using Noticing-Oriented Activities. *International Journal of Science and Mathematics Education, 17*(5), 965-985. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9891-1

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA, 3*(1), 35-48.

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En: Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (eds.). *Análisis didáctico en Educación Matemática: Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 103-120). Comares.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En: Rico, L. y Flores, P. *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Pirámide.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En: Rico, L. y Moreno, A. (coords.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 243-257). Pirámide.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En: Rico, L. y Moreno, A. (coords.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 86-100). Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J., Flores, P., Ramírez Uclés, R. y Fernández Plaza, J. A. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación Matemática 31*(1), 121-143. https://doi.org/10.24844/EM3101.05

Thompson, D. R. (2012). Modifying textbook exercises to incorporate reasoning and communication into the primary mathematics classroom. En: Kaur, B. y Lam, T. (eds.). *Reasoning, communication and connections in mathematics* (pp. 57-74). World Scientific Publishing Company.

10

Modelo del análisis didáctico y la modalidad virtual de aprendizaje y enseñanza

Didactical analysis model and the virtual modality of learning and teaching

Pedro Gómez, Carlos Velasco, Paola Castro y Alexandra Bulla
Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia

Resumen
La pandemia producida por el virus SARS-CoV-2 cambió la forma en la que profesores y estudiantes interactúan durante el desarrollo de sus actividades escolares. El modelo del análisis didáctico se concibió para una situación en la que las clases se implementan de manera presencial: la mayor parte del proceso de aprendizaje y enseñanza tiene lugar en el aula de clase. ¿Qué implicaciones tiene la modalidad virtual en la implementación del modelo del análisis didáctico en el aula y qué aspectos del modelo se deben revisar? Con base en la experiencia de cuatro grupos de profesores que diseñaron e implementaron unidades didácticas en la modalidad virtual durante el confinamiento, en este capítulo, abordamos estas cuestiones y mostramos que el modelo del análisis didáctico se puede adaptar a la modalidad virtual de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Este proceso de adaptación implica algunas oportunidades y dificultades.

Palabras clave: análisis didáctico, formación de profesores, matemáticas, virtualidad

Abstract
The pandemic caused by the SARS-CoV-2 virus changed the way in which teachers and students interact during the development of their school activities. The didactical analysis model was conceived for a situation in which classes are implemented face-to-face: most of the learning and teaching process takes place in the classroom. What implications does the virtual modality have on the implementation of the didactical analysis model in the classroom

and what aspects of the model should be revised? Based on the experience of four groups of teachers who designed and implemented didactical units in a virtual modality during confinement, in this chapter, we address these questions and show that the didactical analysis model can be adapted to the virtual modality of learning and teaching mathematics. This adaptation process involves some opportunities and difficulties.

Keywords: didactical analysis, mathematics, teacher training, virtuality

1. Introducción

En la Universidad de los Andes (Bogotá, Colombia), la Maestría en Educación Matemática (MAD) que ofrecemos sigue de cerca la versión del modelo del análisis didáctico que se concretó en Gómez (2018) y que hemos desarrollado en los últimos quince años. Esta versión del modelo del análisis didáctico aborda las prácticas de planificación, implementación y evaluación de unidades didácticas y presenta características distintivas en los análisis de contenido (Cañadas *et al.*, 2018), cognitivo (González y Gómez, 2018), de instrucción (Gómez *et al.*, 2018), de actuación (Romero y Gómez, 2018) y de datos (Marín y Gómez, 2018). En los últimos once años, hemos formado 89 profesores en siete cohortes. La octava cohorte de la maestría (que identificaremos de aquí en adelante como MAD 8) inició en enero de 2020 y terminó en diciembre de 2021. A diferencia de las cohortes anteriores, las circunstancias de confinamiento por covid-19 establecidas por el Gobierno colombiano en 2020 implicaron que los grupos de profesores en formación diseñaran una unidad didáctica bajo esas circunstancias y la implementaran en abril de 2021. Los estudiantes estaban confinados en sus casas. Los profesores tuvieron que promover el aprendizaje de sus estudiantes a distancia o en la virtualidad.

Los miembros del equipo académico de UED, el centro de investigación y formación en Educación Matemática de la Facultad de Educación de la Universidad de los Andes, constatamos, a finales de 2020, que las circunstancias de confinamiento podían generar dificultades para formadores, tutores y profesores en formación. Siempre habíamos desarrollado la maestría en circunstancias en las que los grupos de profesores en formación implementaban su unidad didáctica en la modalidad presencial: profesores y estudiantes podían interactuar en el aula. De cara a la implementación de las unidades didácticas de esta cohorte, el equipo académico de UED decidió no introducir ningún cambio en el diseño del programa. Esa situación generó las siguientes preguntas: ¿pudieron estos grupos de profesores implementar sus unidades didácticas como esperaban?; ¿qué modificaciones introdujeron en las técnicas curriculares que surgen del modelo y que forman parte del diseño del plan de formación?; y, de la experiencia de estos grupos de profesores, ¿qué conclusiones podemos sacar en relación con la concepción del modelo del análisis didáctico y el diseño del programa?

En este capítulo, reseñamos las reflexiones que realizamos alrededor de estas preguntas y mostramos cómo los cuatro grupos de profesores en formación de MAD 8 abordaron la implementación de su unidad didáctica en circunstancias de confinamiento. En primer lugar, presentamos algunas reflexiones sobre el modelo del análisis didáctico y el diseño de planes de formación basados en él. Buscamos distinguir aquellas cuestiones que son propias del modelo (*conceptos curriculares*) de las que forman parte del diseño del programa (*prácticas y técnicas curriculares*). Después describimos el estudio que realizamos con los grupos de MAD 8 con el propósito de indagar sobre las adaptaciones que ellos introdujeron al implementar su unidad didáctica. Finalmente, discutimos sobre los resultados de ese estudio y presentamos algunas conclusiones.

2. Modelo del análisis didáctico

En este apartado, abordamos tres cuestiones sobre el modelo del análisis didáctico: sus fundamentos, su estructura y la noción de concepto pedagógico. Los fundamentos tienen que ver con las finalidades del modelo, su carácter curricular y las visiones de las matemáticas, su aprendizaje, su enseñanza y su evaluación.

El modelo tiene una finalidad descriptiva. Pretende describir la actuación de un profesor ideal al planificar, implementar y evaluar unidades didácticas sobre temas concretos de las matemáticas escolares. Esta descripción permite establecer las competencias, conocimientos y habilidades que ese profesor ideal debe tener para lograr ese propósito (Gómez, 2006; Gómez, 2007).

Esta información se encuentra en la base del diseño de planes de formación de profesores de matemáticas como MAD (Gómez y González, 2013). Como base de programas de formación de profesores de matemáticas, el modelo del análisis didáctico tiene una finalidad práctica: pretende proporcionar conceptos y técnicas curriculares que le permitan al profesor diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas que proporcionen las mejores oportunidades de aprendizaje a los estudiantes (Gómez, 2014). Su estructura se basa en las competencias de planificación, implementación y evaluación, y en las cuatro dimensiones del currículo: conceptual, cognitiva, formativa y social (Rico, 1997). Finalmente, el modelo surge de una visión constructivista del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas (Simon, 1995) y una visión funcional de las matemáticas (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 95). Las matemáticas se consideran como una herramienta para abordar y resolver problemas en diferentes situaciones. Desde la perspectiva de la formación de los estudiantes, las matemáticas no son un fin en sí mismas. Consideramos que los estudiantes aprenden matemáticas cuando, al abordar tareas complejas que implican problemas contextualizados, ponen en juego los conocimientos y destrezas que tienen disponibles, interactúan y se comunican con otros estudiantes y con el profesor, negocian significados, llegan a acuerdos sobre la solución de la tarea, y comunican y justifican su solución (Gómez y Romero, 2015, p. 62). En este contexto, vemos al profesor como el responsable de diseñar, implementar y evaluar oportunidades para que los estudiantes puedan aprender. Consideramos la evaluación como un proceso continuo de intercambio de información que el profesor utiliza para mejorar esas oportunidades de aprendizaje.

Aunque el modelo inicial del análisis didáctico estaba centrado en la competencia de planificación (Gómez, 2007; Rico *et al.*, 2008), el trabajo que se ha realizado en la Universidad de los Andes ha extendido el modelo a las tres competencias del profesor (Gómez, 2018). Los diferentes análisis del modelo están compuestos por conceptos pedagógicos.

> Los conceptos pedagógicos son herramientas conceptuales y metodológicas que guían la forma en que los profesores de matemáticas ponen en práctica sus conocimientos. Con un concepto pedagógico

> determinado, el profesor puede analizar un tema y producir información específica sobre él que puede utilizar para planificar sus clases. (González y Gómez, 2014, p. 16)

Por ejemplo, los conceptos pedagógicos que componen el análisis de contenido son estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

3. Diseño de planes de formación con base en el modelo

En el apartado anterior describimos las cuestiones clave que sustentan el modelo del análisis didáctico. Esas reflexiones ponen de manifiesto que es necesario distinguir el modelo, en sí mismo, de la implementación del modelo en un plan de formación de profesores de matemáticas. En este apartado, abordamos esa segunda cuestión.

El modelo describe la actuación de un profesor ideal y permite establecer las competencias, conocimientos y habilidades necesarios para esa actuación. Con base en esa información, se diseña un plan de formación. Como es natural, ese diseño atiende a las competencias y sigue las fases propuestas por los análisis que componen el modelo, pero no es el modelo. El plan de formación tiene un propósito: proporcionar a los profesores en formación conceptos y técnicas curriculares para que puedan ofrecer mejores oportunidades de aprendizaje a sus estudiantes.

En el caso de MAD, el programa está estructurado en ocho módulos (dos módulos por semestre): noción de currículo en matemáticas, análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción, análisis de actuación, análisis de datos, evaluación de la planificación e informe final. Cada módulo está compuesto por cuatro actividades. Los módulos y las actividades tienen unos propósitos y abordan un contenido, con una metodología y un esquema de evaluación. El contenido de los módulos y las actividades se refieren tanto a los conceptos implicados en los análisis del modelo (conceptos curriculares) como a los instrumentos y técnicas que hemos diseñado para que los profesores en formación puedan realizar los análisis que se proponen (técnicas curriculares). De cierta manera, los conceptos y las técnicas curriculares que usamos en MAD se refieren a dos espacios diferentes: los conceptos forman parte del modelo y las técnicas forman parte del diseño del plan de formación. A continuación, describimos brevemente el programa.

Al inicio del programa, los participantes se organizan en grupos de tres o cuatro personas. Cada grupo trabaja en un tema matemático concreto y realiza un ciclo de análisis didáctico sobre su tema a lo largo de los ocho módulos del programa. Al final de los primeros cinco módulos, los grupos producen un diseño de la unidad didáctica. Entre el quinto y sexto módulo, los grupos se centran en la implementación de la unidad didáctica. Entre el sexto y séptimo módulo, ellos se centran en la recolección y análisis de la información con motivo de esta implementación y, en el último módulo, en la producción del informe de la experiencia global.

Cada grupo tiene asignado un tutor que lo acompaña a lo largo de todo el programa. Los grupos reciben también el apoyo permanente del responsable de la cohorte, quien está a cargo de su gestión. En lo que sigue, nos referiremos a los propósitos de los módulos y actividades, y a los conceptos y a las técnicas curriculares, con el objetivo de centrar la atención en aquello que puede cambiar cuando los profesores implementan sus unidades didácticas en la modalidad virtual.

En la implementación que hemos hecho del modelo para el diseño de MAD, hemos establecido unos propósitos para los módulos y las actividades del programa. Por ejemplo, en el módulo del análisis de contenido, el propósito es que los profesores en formación concreten el tema de las matemáticas de su propuesta y, en el análisis de instrucción, se busca que los profesores diseñen la secuencia de tareas de aprendizaje que contribuya al logro de los objetivos de aprendizaje que establecieron en el módulo de análisis cognitivo. Por otro lado, las actividades también tienen propósitos. La segunda actividad del análisis de actuación busca que los grupos de profesores en formación establezcan los criterios de logro para los objetivos de aprendizaje e integren en la planificación de la instrucción los aspectos correspondientes a la evaluación.

Los conceptos curriculares forman parte del modelo del análisis didáctico, mientras que las técnicas curriculares son propias del diseño del programa de formación. En el análisis de instrucción, la noción de tarea es un concepto pedagógico y los materiales y recursos son uno de sus conceptos curriculares. El programa sugiere una técnica curricular para la selección de materiales y recursos basada en su eficacia y eficiencia (Gómez *et al.*, 2018, pp. 214-217). Encontramos que varios programas de formación, basados en el modelo del análisis didáctico, pueden proponer técnicas curriculares diferentes. En cierta medida, esto sucede cuando comparamos, por ejemplo, el diseño de MAD, el diseño del curso de deconstrucción de problemas matemáticos (https://bit.ly/UED_Deconstruccion) y el diseño de los cursos MOOC (https://bit.ly/CursosMOOC_UED) que UED ofrece a profesores de Primaria.

4. Preguntas de investigación

Las reflexiones anteriores tenían como propósito centrar nuestra atención en las cuestiones que queremos abordar en este capítulo. De cara al trabajo de MAD 8, el equipo académico de UED decidió no introducir ningún cambio en el modelo o en el diseño del programa. No obstante, sugerimos a los grupos de profesores en formación que diseñaran su unidad didáctica bajo el supuesto de que sería implementada en circunstancias de confinamiento. Dado el diseño del programa, estos cambios y adaptaciones se refieren exclusivamente a las técnicas curriculares. De esta forma, nos formulamos las siguientes preguntas que abordan las implicaciones de la modalidad virtual en la implementación del modelo del análisis didáctico en el aula y en los aspectos del modelo que se deben revisar: *a*) ¿cuáles fueron las principales dificultades que ellos enfrentaron en este proceso?; *b*) ¿lograron los grupos de profesores en formación implementar su unidad didáctica de acuerdo con las finalidades, estructura, conceptos y propósitos propuestos por el modelo y el programa de formación?; *c*) si lo lograron, ¿qué cambios y adaptaciones introdujeron a las técnicas curriculares?; *d*) con motivo de esta experiencia, ¿qué oportunidades y retos surgen al implementar unidades didácticas basadas en el modelo del análisis didáctico en la modalidad virtual?; y *e*) ¿cómo influyó la formación que ellos habían recibido en el programa en las decisiones que ellos toma-ron para adaptar el diseño y la implementación de su unidad didáctica a las circunstancias del confinamiento?

5. Método

Para indagar sobre las preguntas de investigación, entrevistamos a los cuatro grupos de MAD 8. Los cuatro grupos aceptaron la invitación y todos los miembros de los grupos asistieron a las entrevistas. Entrevistamos cada grupo por separado y ellos aceptaron que la entrevista fuera grabada en audio. Realizamos una entrevista semiestructurada que configuramos alrededor de ocho preguntas que se discutieron entre los autores para asegurarnos de su validez interna. Las preguntas fueron las siguientes: *a*) ¿cómo clasificaron a los estudiantes en términos de su posibilidad de interacción?; *b*) ¿qué dificultades tuvieron que abordar en el diseño y la implementación de la unidad didáctica con motivo de las circunstancias del confinamiento?; *c*) ¿cómo abordaron esas dificultades?; *d*) ¿se hicieron cambios en la secuencia de tareas, elementos de las tareas, diarios u otros elementos de la unidad didáctica?; *e*) ¿qué se logró de lo que se esperaba?; *f*) ¿qué no se logró de lo que se esperaba?; *g*) ¿consideran que lo logrado en la virtualidad es diferente a lo que habrían logrado en una modalidad presencial?; y *h*) ¿qué aprendieron con motivo de esta implementación?

Al menos tres investigadores asistieron a las entrevistas. Uno de ellos asumió el cargo de moderador y formuló las preguntas a medida que se avanzaba en la entrevista. Los otros investigadores y el moderador realizaron preguntas más concretas de acuerdo con las respuestas de los grupos. Por ejemplo, en algunas ocasiones se indagó sobre la dinámica de clase o sobre el efecto de la formación que ellos habían recibido durante el programa en su actuación en la implementación. Al menos dos investigadores recogieron y organizaron separadamente la información proporcionada por los profesores en un esquema de categorías y códigos que surgen de las técnicas curriculares que se proponen en el programa y de las mismas preguntas. Por ejemplo, para la categoría de prácticas curriculares, identificamos el código selección de materiales y recursos.

Una vez terminadas todas las entrevistas, estos dos investigadores revisaron las grabaciones, compararon sus apuntes y llegaron a acuerdos sobre la información proporcionada por los grupos de profesores. En los casos de desacuerdo, los investigadores regresaron a las grabaciones para validar sus interpretaciones con base en la evidencia. Uno de los investigadores recogió estos acuerdos y reunió en un solo archivo la información que se obtuvo de los cuatro grupos. Este resumen estructurado fue revisado y discutido por todos los investigadores. Como resultado de los acuerdos a los que se llegó en esa discusión, identificamos las cuestiones clave que presentamos como resultados.

6. Contexto

La modalidad virtual dio lugar a una clasificación de los estudiantes de acuerdo con sus posibilidades de interacción e implicó que los profesores tuvieran que enfrentar dificultades que describimos a continuación.

6.1. Clasificación de los estudiantes

Según las posibilidades de comunicación con los estudiantes, los cuatro grupos de profesores los clasificaron en cuatro categorías: *a*) los que pudieron asistir permanentemente a las clases sincrónicas en plataformas; *b*) los que asistían de manera intermitente a las clases sincrónicas, pero tenían acceso a sistemas como WhatsApp; *c*) los que solo tenían acceso a sistemas como WhatsApp; y *d*) los que solo tenían acceso a documentos y llamadas telefónicas como medio de interacción. Los profesores nos informaron, sobre todo, acerca de las clases sincrónicas y describieron con menos detalle los procesos con los estudiantes que no pudieron asistir a ellas.

6.2. Dificultades

El paso de la modalidad presencial a la modalidad virtual llevó a los profesores a enfrentarse a dificultades diversas. Estas dificultades forman parte del contexto en el que ellos diseñaron e implementaron su unidad didáctica, y resultaron relevantes para el desarrollo de las tareas de aprendizaje. Tres de los cuatro grupos tuvieron que enfrentarse a la novedad de la tecnología en la virtualidad. Fue necesario que ellos aprendieran a usar las plataformas para sus clases sincrónicas y las demás tecnologías para proporcionar información e interactuar con sus estudiantes. Asimismo, manifestaron las dificultades que tuvieron para saber en qué medida y de qué forma sus estudiantes estaban aprendiendo. Por esa razón, percibieron que no pudieron ayudar, retroalimentar e interactuar con sus estudiantes como hubieran deseado.

El confinamiento y el paso a la modalidad virtual tuvieron implicaciones en la organización temporal del trabajo de los profesores. Los profesores mencionaron el impacto del confinamiento en su carga laboral. Los horarios de trabajo se ampliaron y ellos tuvieron que atender a su estudiantes, jefes y padres de familia en los momentos en los que la interacción era posible. Algunas instituciones educativas incluyeron normas para flexibilizar la entrega de los trabajos por parte de los estudiantes que no se podían conectar. Esto dificultó la revisión de esos trabajos y la retroalimentación que los profesores les podían dar. Por otro lado, las nuevas circunstancias implicaron que la organización de la enseñanza tomara más tiempo: en las clases sincrónicas, el tiempo para organizar a los estudiantes fue mayor y, para los estudiantes a los que se les enviaba el material de trabajo impreso, se dedicó tiempo adicional para su organización y entrega.

7. Resultados

Los profesores entrevistados nos informaron sobre múltiples aspectos de su experiencia. En este apartado, recogemos y organizamos esa información en dos aspectos: las prácticas de planificación e implementación (diarios, agrupamientos, interacción, retroalimentación, ayudas, y materiales y recursos) y los retos y oportunidades que surgen de esta experiencia.

7.1. Prácticas curriculares

Los profesores diseñaron su planificación para las nuevas circunstancias. Esa planificación incluyó todos los elementos previstos en el modelo. Entre las prácticas curriculares que sufrieron modificaciones se encuentran el diario del estudiante y el diario del profesor. El diario del estudiante es un instrumento que le permite al profesor recoger información sobre la percepción que los estudiantes tienen de las tareas propuestas y de su actuación al resolverlas. El diario del profesor es un instrumento con el que el profesor registra información sobre sus percepciones de lo sucedido durante la sesión de clase. En condiciones «normales», con motivo del análisis de actuación, se espera que estos instrumentos sean diligenciados como cierre de las sesiones.

Tres de los cuatro grupos aprovecharon la modalidad virtual de las clases para realizar una implementación compartida de la unidad didáctica: los dos miembros del grupo que no eran el profesor a cargo de la clase asistieron a las sesiones. Ellos participaron como observadores y como apoyo para la interacción con los estudiantes cuando ellos se organizaban en salas de la plataforma. En algunos casos, los roles que cada uno asumió dependieron de su conocimiento tecnológico. El profesor que conocía las herramientas explicaba su funcionamiento y apoyaba a los estudiantes en ese aspecto.

A continuación, describimos cómo los grupos de profesores implementaron su unidad didáctica en las nuevas circunstancias. Dado que se esperaba que los grupos implementaran el diseño que habían preparado, la información que proporcionamos se refiere tanto a ese diseño como a su implementación. Centramos la atención en los diarios del estudiante y el profesor, y en los siguientes elementos de las tareas de aprendizaje: agrupamientos, interacción, retroalimentación, ayudas, y materiales y recursos. Estos fueron los aspectos del diseño del programa en los que los grupos de profesores introdujeron adaptaciones a las técnicas curriculares.

A diferencia de lo que sucede en la modalidad presencial, los agrupamientos en la modalidad virtual requirieron que los grupos de profesores aprendieran a usar la funcionalidad de creación de salas en la plataforma. Tres grupos de profesores implementaron esta funcionalidad. En estos casos, los estudiantes se organizaron en parejas o grupos de tres estudiantes que debían resolver la tarea conjuntamente. Una vez los grupos de estudiantes resolvían la tarea, el grupo de clase se reunía de nuevo en la plataforma para la presentación y la discusión posterior.

Los grupos de profesores que realizaron la implementación compartida manifestaron varias dificultades relacionadas con la interacción con y entre los estudiantes. Estas dificultades fueron generalizadas en todas sus clases, pero ellos las percibieron con más claridad en aquellas clases en las que implementaron su unidad didáctica. Todos pusieron de manifiesto una situación que no esperaban: los estudiantes no habían tenido la oportunidad de interactuar socialmente entre ellos durante el confinamiento. Al reunirse privadamente en pequeños grupos con el propósito de resolver las tareas, los estudiantes aprovecharon este espacio para conversar entre ellos sobre cuestiones no académicas. Para lograrlo, los estudiantes intentaban resolver la tarea rápidamente y así tener tiempo para compartir socialmente. Por otro lado, los profesores y observadores percibieron dificultades para interactuar con los grupos de estudiantes en las salas. Les fue difícil establecer cómo estaban abordando la tarea y qué dificultades estaban teniendo. Varios profesores manifestaron que percibían a los estudiantes muy callados y tímidos en estas circunstancias. Algunos estudiantes preferían comunicarse directa e individualmente con el profesor o el observador por medio del chat.

Los grupos implementaron varias estrategias para proporcionar retroalimentación a sus estudiantes. Para los estudiantes que podían asistir a las clases sincrónicas, los profesores proporcionaron retroalimentación a los grupos de estudiantes que estaban en las salas y al grupo de clase en la sala general. En ese caso, se basaron en la información que surgía de las salas de los grupos de estudiantes para, luego, abordarlas con todo el grupo de estudiantes.

Para los estudiantes que no podían asistir a las clases sincrónicas, pero que tenían acceso a sistemas como WhatsApp, algunos grupos de profesores produjeron vídeos con explicaciones y retroalimentación. Otros grupos de profesores incluyeron también los vídeos de la grabación de la clase sincrónica. Finalmente, los profesores tuvieron que incluir la retroalimentación en los documentos que enviaron a los estudiantes que no tenían acceso a dispositivos e Internet.

Todos los grupos de profesores manifestaron que la modalidad virtual no les permitía identificar con precisión las dificultades de los estudiantes al resolver las tareas. Como ya lo mencionamos, ellos implementaron las ayudas que consideraron relevantes tanto en los grupos de estudiantes dentro de las salas como en el grupo reunido en la sala general. No obstante, los profesores percibieron que no podían proporcionar las ayudas individuales que hubiesen deseado implementar. Al tener que abordar dificultades individuales con la totalidad de los grupos de estudiantes, algunos profesores constataron que esas ayudas podían confundir a los estudiantes que no tenían la dificultad en cuestión y que podían inducir a algunos estudiantes a abordar la tarea con una estrategia específica, cuando la tarea promovía varias estrategias diferentes. Un grupo de profesores indicó que la implementación del tablero digital dentro de la plataforma fue una herramienta muy útil de cara a proporcionar las ayudas. Las grabaciones de las clases sincrónicas también fueron compartidas a los estudiantes como ayudas.

Uno de los elementos de una tarea son los materiales y recursos que los estudiantes pueden usar para resolverla. Los grupos de profesores seleccionaron materiales y recursos ejecutables para que los estudiantes los pudieran usar en la modalidad virtual. Ellos crearon presentaciones y vídeos, utilizaron simulaciones en línea, y reemplazaron algunos materiales manipulables con aplicaciones web. Openboard y SolidWorks fueron algunos programas utilizados por los grupos. También se generaron vídeos tutoriales de su autoría (p. ej.: https://youtu.be/uSJwWjFxTPw). Los profesores nos comunicaron que el uso de estos materiales y recursos contribuyó positivamente al desarrollo de las tareas.

Todos los grupos de profesores lograron implementar el diario del estudiante. Para ello, desarrollaron diferentes técnicas para la recolección de la información. En el caso de las clases sincrónicas, algunos recogieron la información tan pronto los estudiantes terminaban las tareas. En otros casos, y con motivo de las dificultades con el tiempo, los profesores solicitaron a los estudiantes que diligenciaran y entregaran el diario al comienzo de la siguiente sesión. Para acelerar el proceso y facilitar el análisis de la información, un grupo implementó una versión en línea del diario. En el caso de los estudiantes que no tenían conectividad, los diarios se recogieron junto con la solución de la tarea que los estudiantes hacían llegar a los profesores.

La recolección de la información para el diario del profesor generó dificultades para todos los grupos. Los profesores manifestaron que no previeron que, en la virtualidad, no les era posible saber en qué medida los estudiantes estaban aprendiendo y cómo lo estaban haciendo. Los tres grupos que realizaron la implementación compartida resolvieron parcialmente esta dificultad con un esquema en el que los profesores invitados fueron observadores del trabajo de los grupos estudiantes dentro de las salas de la plataforma. De esta forma, ellos lograron interactuar con estos grupos y establecer, en alguna medida, cómo estaban resolviendo las tareas.

7.2. Oportunidades y retos

Solicitamos a los grupos de profesores que hicieran un balance de su experiencia al implementar su unidad didáctica en las circunstancias de confinamiento. Tres grupos manifestaron que, dado que no tenían experiencia con la modalidad virtual, ellos formularon expectativas de aprendizaje que resultaron demasiado ambiciosas para esa modalidad. No obstante, un profesor informó que sus estudiantes avanzaron más en su aprendizaje con la unidad didáctica que implementaron que lo que estudiantes de cursos anteriores habían logrado con el esquema tradicional de aprendizaje y enseñanza que él había usado en la presencialidad.

A lo largo de las cuatro entrevistas, hubo un comentario reiterado por parte de los grupos de profesores. Este comentario se concretó en expresiones como:

> No sabemos a quién le estamos dictando clase.
> No sabemos si están prestando atención.
> No sabemos si están aprendiendo.
> No podemos ver qué están haciendo y cómo lo están haciendo.

Esta incertidumbre sobre el proceso de aprendizaje de los estudiantes fue el aspecto que los profesores percibieron como más perjudicial de la modalidad virtual. Al no tener información sobre el proceso de resolución de la tarea y no poder percibir los gestos de sus estudiantes, los profesores no pudieron establecer con claridad sus dificultades y no pudieron ayudarlos a superarlas como lo previeron en el diseño de las tareas de aprendizaje (análisis de instrucción). Algunos profesores constataron que los estudiantes podían estar recibiendo ayuda (de sus padres, familiares o compañeros) y no podían saber, a partir de sus producciones, si ellos habían aprendido.

La situación anterior generó cierto grado de frustración en algunos de los profesores. Sintieron que no pudieron implementar su unidad didáctica como «la habían soñado», pero, sobre todo, se sintieron frustrados porque no pudieron ayudar a sus estudiantes como hubiesen deseado. En algunos casos, ellos percibieron que sus estudiantes tuvieron una actitud pasiva y poco participativa que no tenían en la presencialidad. También manifestaron frustración en relación con los estudiantes que no tenían ningún tipo de conectividad. Los profesores comentaron que esos estudiantes se sentían solos y discriminados, porque no tenían a quién preguntar y no tenían recursos para interactuar con su profesor y sus compañeros.

8. Discusión

Los cuatro grupos de profesores implementaron su unidad didáctica de acuerdo con el plan previsto en el programa. Ningún grupo decidió que, con motivo de las circunstancias, no implementaría alguno de los elementos previstos. Este fue un reto importante para ellos y lograron abordarlo y superarlo con éxito. En ese proceso, ellos diseñaron y adaptaron las técnicas curriculares a las nuevas circunstancias: diseñaron nuevos esquemas para recoger la información de los diarios del estudiante y el profesor; utilizaron las funcionalidades de las plataformas virtuales para agrupar a los estudiantes; buscaron nuevos esquemas para interactuar con ellos; percibieron dificultades para observar el proceso de desarrollo de las tareas y en las dinámicas de comunicación para saber cómo los estudiantes estaban aprendiendo y cómo ellos podían ayudarlos; y seleccionaron los materiales y recursos de sus tareas para que funcionaran en el entorno virtual.

Durante las entrevistas, los profesores mencionaron el impacto que la formación que habían recibido hasta ese momento en el programa tuvo a la hora de enfrentar la enseñanza en la modalidad virtual. En particular, recalcaron la importancia de realizar sistemática y detalladamente la planificación de sus clases. Ellos pudieron plasmar en el papel el paso a paso de lo que preveían para sus clases. En particular, destacaron la importancia de prever las dificultades y errores de los estudiantes, y de diseñar las retroalimentaciones y ayudas correspondientes. También afirmaron que su formación les permitió diseñar e implementar nuevas estrategias para abordar los retos a los que se enfrentaban.

Como constatamos en otro estudio (Castro *et al.*, aceptado), las nuevas circunstancias acercaron a los profesores con sus directivos, colegas, padres de familia y estudiantes. Se dio una situación denominada «entre más lejos, más cerca». Finalmente, las nuevas circunstancias los llevaron a reflexionar sobre el aprendizaje y la enseñanza de maneras en las que no lo habían hecho con anterioridad.

De las reflexiones anteriores, concluimos que el confinamiento y la modalidad virtual en la que los profesores implementaron sus unidades didácticas tienen virtudes y generan dificultades. Entre las virtudes, constatamos que el confinamiento y la virtualidad permitieron que todos los profesores de un grupo participaran en la implementación de la unidad didáctica en el esquema que hemos denominado la *implementación compartida*. Otra virtud de las nuevas circunstancias fue el aprendizaje de las herramientas tecnológicas que los profesores tuvieron que realizar sobre la marcha. Por ejemplo, los profesores aprendieron a grabar las sesiones de clase, a organizar a los estudiantes en pequeños grupos y a usar herramientas tecnológicas como materiales y recursos. Nosotros consideramos que el hecho de que los estudiantes hayan recibido apoyo y ayuda de sus familiares y compañeros es una virtud de la modalidad virtual. En particular, esta situación llevó a los padres a involucrarse de manera más concreta en el aprendizaje de sus hijos. Con todo, esto es algo que sorprendió a los profesores y que no abordaron en el diseño e implementación de su unidad didáctica. Una profesora mencionó que «la tecnología no nos deshumanizó». Por el contrario, las circunstancias de confinamiento llevaron a los profesores a ser más conscientes de la dimensión afectiva de sus estudiantes, al reconocer explícitamente sus circunstancias y necesidades particulares. Ellos establecieron comunicaciones personalizadas más frecuentes con sus estudiantes en las que, con frecuencia, el tema de conversación no eran las matemáticas. Los profesores estuvieron más disponibles a escuchar y hablar que en la presencialidad.

A pesar de sus virtudes, las nuevas circunstancias presentan una dificultad particular que todos los grupos mencionaron y para la cual no encontraron una solución adecuada. Ellos reiteraron que, en la modalidad virtual, no les fue posible acceder a información que les permitiera constatar en qué medida y de qué manera sus estudiantes estaban aprendiendo. Al recibir las producciones terminadas de los estudiantes, percibir que algunos de ellos podían estar recibiendo ayuda de otras personas, no poder observar el proceso de resolución de las tareas y no poder percibir los gestos de sus estudiantes cuando estaban trabajando, los profesores recibieron información parcial y no necesariamente objetiva sobre las dificultades y los errores de sus estudiantes. Esto les impidió implementar apropiadamente las ayudas que tenían previstas y retroalimentar el trabajo de sus estudiantes para ayudarlos a superar sus dificultades, de acuerdo con lo planificado en los análisis de instrucción y actuación.

Consideramos que los profesores salen fortalecidos de esta experiencia. Muchos de ellos lograron aprendizajes tecnológicos que no habrían logrado en circunstancias normales y que les permitieron enriquecer las tareas de aprendizaje en términos de los recursos que se pueden incluir para favorecer el aprendizaje de los estudiantes. Ellos consideran que estas circunstancias los sacaron de la rutina diaria y lograron abordar sus problemas en la práctica con nuevas estrategias y herramientas. Ellos se volvieron más reflexivos sobre su práctica y su relación con sus estudiantes, y lograron establecer nuevas formas de relacionarse con sus colegas. Hemos constatado resultados similares en un estudio de caso que realizamos con una profesora en la ruralidad (Castro *et al.*, aceptado) y en un estudio sobre la planificación de los profesores durante el confinamiento (Centro Latinoamericano de Investigación en Complejidad, 2020).

9. Conclusiones

El confinamiento producto de la pandemia de la covid-19 obligó a la mayoría de los profesores a apoyarse en la tecnología para ofrecer a sus estudiantes mejores oportunidades para aprender matemáticas. Esta situación logró algo que, en circunstancias normales, habría sido difícil: que los profesores aprendieran a usar la tecnología y reconocieran su papel en sus clases. El papel de la tecnología se expresó principalmente en dos aspectos: como medio para establecer la comunicación y la interacción entre profesores y estudiantes, y como recurso didáctico. Todos los profesores que entrevistamos fueron exitosos al usar la tecnología para organizar sus sesiones virtuales de clase. La mayoría de ellos también lograron introducir recursos tecnológicos en sus tareas de aprendizaje, y lo hicieron de manera eficiente: no usaron la tecnología por usarla, sino que la usaron en la medida que vieron que tenía sentido para sus propósitos (Gómez *et al.*, 2018). Algunos mencionaron que, cuando se regrese a la «nueva normalidad», ellos piensan usar la tecnología con más frecuencia en sus clases. Desde la perspectiva de nuestro programa de formación, esta experiencia nos lleva a reflexionar sobre cómo, en el análisis de instrucción, debemos fortalecer las habilidades relacionadas con el uso de plataformas y otros medios de comunicación de los profesores en formación.

Las condiciones de confinamiento y, en particular, las posibilidades de comunicación con las que contaron los estudiantes inciden de manera importante en algunas de las visiones en las que se sustenta el modelo del análisis didáctico y que fundamentan el diseño del programa de formación. En particular, el modelo del análisis didáctico ve el aprendizaje de los estudiantes como un proceso en el que ellos interactúan y se comunican con otros estudiantes y con el profesor, negocian significados, llegan a acuerdos sobre la solución de la tarea, y comunican y justifican su solución. La información que nos proporcionaron los profesores entrevistados puso de manifiesto que este tipo de interacción entre el profesor y los estudiantes, y entre los estudiantes no se logró como se esperaba. En particular, ellos no pudieron implementar, como pretendían, todas las ayudas que diseñaron para los errores en los que ellos previeron que sus estudiantes podían incurrir al abordar las tareas que conforman su unidad didáctica. Por otro lado, para la implementación de su unidad didáctica, el diseño del programa de formación requiere que los grupos de profesores perciban y establezcan los procedimientos que los estudiantes ponen en juego para resolver las tareas e identifiquen los errores y las dificultades que ellos manifiestan al hacerlo. Se espera que los profesores reaccionen sobre la marcha a estos errores y dificultades con retroalimentación y ayudas que permitan a los estudiantes superar esas dificultades. Sin embargo, los profesores no pudieron establecer con precisión lo que sus estudiantes estaban haciendo y las dificultades que estaban enfrentando, y no encontraron las formas para retroalimentar apropiadamente a los estudiantes con dificultades.

En la actualidad, MAD se ofrece en modalidad virtual. Consideramos que su diseño promueve el aprendizaje interdependiente: el diseño de las actividades y los esquemas de interacción entre los grupos y su tutor, el formador y el responsable de la cohorte favorecen la interacción entre los miembros del grupo de profesores y la construcción conjunta de su conocimiento matemático y didáctico (Pinzón y Gómez, 2020). Estos esquemas de interacción también permiten que los miembros del equipo académico puedan establecer las dificultades que los grupos enfrentan y proporcionar la retroalimentación necesaria para que ellos puedan superarlas. Pero que en MAD se hayan resuelto estas cuestiones no significa que tengamos la solución a estos problemas para los profesores que, en sus propios contextos, quieren promover el aprendizaje de sus estudiantes.

Este estudio nos genera preguntas con motivo de las nuevas circunstancias en las que la virtualidad y la tecnología juegan un nuevo papel: ¿debemos modificar nuestra visión del aprendizaje de los estudiantes?, ¿qué indicaciones y técnicas curriculares debemos introducir para que los profesores puedan diseñar tareas de aprendizaje que, en la virtualidad, promuevan el aprendizaje interdependiente entre sus estudiantes? y ¿cómo debemos modificar las técnicas curriculares y el diseño de las tareas de aprendizaje para que los profesores puedan establecer el proceso de aprendizaje de sus estudiantes y apoyarlos a superar sus dificultades? Nosotros tenemos el reto de responder estas preguntas e implementar las soluciones en el futuro próximo.

10. Agradecimientos

Agradecemos a Andrés Pinzón, por su colaboración en algunas discusiones y sus comentarios al documento, y a Leonel Amaya, Robinson Alfonso Arias, Esneider Yesith Benavides, Fredy Alexander Chaves, Miriam Elena Ladino, Zayra Yamile Malaver, Jesús Antonio Medellín, María Andrea Parada, María Fernanda Pérez, Nancy Hermelinda Rojas, Omar Libardo Santana y Sonia Liliana Sarmiento, estudiantes de MAD 8, por su colaboración en este estudio.

11. Referencias

Cañadas, M. C., Gómez, P. y Pinzón, A. (2018). Análisis de contenido. En: Gómez, P. (ed.). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 53-112). Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/11904

Castro, P., Gómez, P. y Mesa, V. (aceptado). Prácticas del profesor de matemáticas en la ruralidad durante el confinamiento. *Revista Colombiana de Educación*.

Centro Latinoamericano de Investigación en Complejidad. (2020). *Desafíos educativos colombianos en tiempos de Covid-19. Una oportunidad para reflexionar y transformar nuestras propuestas pedagógicas*. https://www.cliceducacion.com/investigacion-en-clic/

Gómez, P. (2006). Análisis didáctico en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En: Bolea, P., González, M. J. y Moreno, M. (eds.). *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 15-35). Instituto de Estudios Aragoneses. http://funes.uniandes.edu.co/1278

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. http://funes.uniandes.edu.co/444

Gómez, P. (2014). Análisis didáctico en la práctica de la formación permanente de profesores de matemáticas de secundaria. En: Gómez, P. (ed.). *Diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas de matemáticas en MAD 1* (vol. 1, pp. 1-23). Uniandes.

Gómez, P. (ed.). (2018). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares*. Universidad de los Andes.

Gómez, P. y González, M. J. (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En: Rico, L., Lupiañez, J. L. y Molina, M. (eds.). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Formación de profesores, innovación curricular y metodología de investigación* (pp. 121-139). Comares. http://tinyurl.com/pq5yn9n

Gómez, P., Mora, M. F. y Velasco, C. (2018). Análisis de instrucción. En: Gómez, P. (ed.). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 197-268). Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/11906

Gómez, P. y Romero, I. (2015). Enseñar las matemáticas escolares En: Flores, P. y Rico, L. (eds.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 61-88). Pirámide.

González, M. J. y Gómez, P. (2014). Conceptualizing and describing teachers' learning of pedagogical concepts. *Australian Journal of Teacher Education, 39*(12), 13-30. http://funes.uniandes.edu.co/6175

González, M. J. y Gómez, P. (2018). Análisis cognitivo. En: Gómez, P. (ed.). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 113-196). Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/11905

Marín, A. y Gómez, P. (2018). Análisis de datos. En: Gómez, P. (ed.). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 303-369). Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/11908

Pinzón, A. y Gómez, P. (2020). A collaboration model for the training of in-service secondary mathematics teachers. En: Borko, H. y Potari, D. (eds.). *ICMI Study 25. Teachers of mathematics working and learning in collaborative groups* (pp. 396-403). National and Kapodistran University of Athens.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Síntesis.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Alianza.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23. https://revistasuma.es/IMG/pdf/58/007-023.pdf.

Romero, I. y Gómez, P. (2018). Análisis de actuación. En: Gómez, P. (ed.). *Formación de profesores de matemáticas y práctica de aula: conceptos y técnicas curriculares* (pp. 269-301). Universidad de los Andes. http://funes.uniandes.edu.co/11907

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145. DOI: 10.2307/749205

11

La evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto sobre trigonometría publicados en España

The evolution of methods for solving oblique triangles in the textbooks on trigonometry published in Spain

Carmen León-Mantero,[1] María José Madrid[2]
y Alexander Maz-Machado[1]
[1]Universidad de Córdoba, [2]Universidad Pontificia de Salamanca

Resumen
Presentamos un estudio sobre la evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos descritos en los libros de textos de trigonometría publicados en España durante diferentes épocas. Se trata de una investigación descriptiva y exploratoria, que se enmarca en el enfoque de tipo histórico y que usa el método del análisis de contenido para el estudio de los datos. Entre los autores de los libros de texto analizados encontramos al Padre Zaragoza, Tomás Vicente Tosca, Benito Bails, Vicente Tofiño, José Mariano Vallejo, Silvestre Lacroix o Juan Cortázar, entre otros. Los resultados han identificado los dos métodos incluidos en textos españoles para la resolución de los triángulos oblicuángulos, estos métodos fueron utilizados en dos periodos diferenciados marcados por la publicación de las traducciones de los libros de texto de Silvestre Lacroix, que supusieron la introducción en España del teorema del coseno.

Palabras clave: trigonometría, resolución de triángulos oblicuángulos, libros de texto, historia de la educación matemática, teorema del coseno

Abstract
We present a research on the evolution of methods for solving oblique triangles included in Trigonometry textbooks published in Spain during different periods. This is a descriptive and exploratory research, which is focused in the historical approach and uses the content analysis method to study the data.

Among the authors of the textbooks analysed are José Zaragoza, Tomás Vicente Tosca, Benito Bails, Vicente Tofiño, José Mariano Vallejo, Silvestre Lacroix and Juan Cortázar. The results identified two resolution methods included in Spanish books for solving oblique triangles. These methods were used in two different periods separated by the publication of the translations of Silvestre Lacroix's textbooks, which meant the introduction of the law of cosines in Spain.

Keywords: trigonometry, solution of oblique triangles, textbooks, history of mathematics education, law of cosines

1. Introducción

Las investigaciones en historia de las matemáticas y educación matemática se encargan de descubrir y comprender de qué forma los avances matemáticos en cada época han sido incorporados a la enseñanza de la disciplina, y cómo el contexto que rodea a estos avances ha ejercido influencia en la forma de presentarlos a través del sistema educativo en vigor (Karp, 2014).

En concreto, aquellas investigaciones que tienen a los libros de texto históricos como fuentes documentales, buscan entre otras cuestiones conocer el tratamiento dado a los contenidos, los principios y estrategias didácticas presentes en ellos, etc., ya que estos libros han sido hasta hace poco la vía principal de divulgación y la fuente de información más importante tanto para profesores como para alumnos (Gómez, 2011). Por ese motivo su análisis nos permite vislumbrar la evolución histórica de conceptos y contenidos matemáticos a lo largo de la historia y la influencia que ha ejercido el contexto histórico, social y cultural (Maz-Machado y Rico, 2015).

Entre las numerosas investigaciones que centran su atención en el análisis de libros de texto históricos se incluyen la realizada por Christianidisa y Megremi (2019), que demostraron la influencia de la *Arithmetica* de Diofanto en diferentes textos hasta principios de la Edad Media. También d'Enfert y Búrigo (2019) indagan en los contenidos de matemáticas que se abordaban en las escuelas primarias normales de Francia en la década de 1830.

Las investigaciones realizadas a nivel nacional se engloban principalmente en dos líneas: por un lado, la identificación de las bases del currículo actual y, por otro, el estudio del origen de los problemas que surgen en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Así, podemos encontrar trabajos como el de Puig (1994) que analizó una parte del libro de Jordanus Nemorarius *De Numeris Datis* centrándose en su sistema matemático de signos; Picado *et al*. (2013) analizaron un libro de texto de matemáticas utilizado para la enseñanza de la aritmética y el sistema métrico decimal en Canarias en el siglo XIX; Sierra *et al*. (2002) estudiaron el desarrollo histórico del concepto de *continuidad* en distintos manuales escolares españoles. También Gómez (2018) estudia los problemas verbales descriptivos a través del análisis didáctico en libros de texto y manuales escolares; Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2020) analizan los prólogos de las obras que incluyen álgebra escritas en español y publicadas durante el siglo XVI; o el trabajo de León-Mantero *et al*. (2021) en el que se analiza el *Tratado de Álgebra elemental* de Juan Cortázar, uno de los libros de texto que fueron elegidos para formar parte de las listas oficiales para la enseñanza secundaria desde mediados del siglo XIX.

La trigonometría aporta un importante conjunto de herramientas que permiten resolver problemas geométricos que surgen en numerosas situaciones reales. Su inclusión en el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato responde, por un lado, a su importancia en el estudio de las matemáticas avanzadas y, por otro, a sus importantes aplicaciones en campos científicos y tecnológicos. Sin embargo, el estudio de la trigonometría, al igual que las demás ramas de las matemáticas, suele provocar dificultades entre los estudiantes de Secundaria y Bachillerato, debido a que requiere de altos niveles de abstracción y pensamiento matemático avanzado (Dündar, 2015; Gur, 2009).

El objetivo del presente trabajo es analizar la evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos y cómo se realizó su incorporación al sistema educativo a través de los libros de texto sobre trigonometría que han sido publicados en España. En primer lugar, centraremos nuestra atención en los primeros libros de texto que incluyeron estos métodos y en el enfoque geométrico que los impregnaba, para después ser testigos con el paso de los años del proceso de algebrización que produjo la introducción del teorema del coseno como principal herramienta de resolución.

Este trabajo pretende contribuir a la formación inicial o permanente de los profesores de matemáticas, ya que, por un lado, investigaciones como esta hacen posible que las Matemáticas se reconozcan como una actividad humana, lo que permite ver las diferentes facetas de los conceptos y teorías matemáticas y sacar a la luz los obstáculos que surgen en el estudio de las Matemáticas (Furinghetti, 2012), entre ellos, los obstáculos a los que se suelen enfrentarse sus alumnos cuando se aborda en el aula la resolución de triángulos oblicuángulos. Por otro, tal y como indica Schubring (2006), conocer los problemas surgidos en el desarrollo y en la enseñanza de la materia que imparten y cómo algunos han sido ya resueltos, les capacita para enfrentarse a las dificultades que surgen en el ejercicio diario de su actividad.

2. Contexto histórico

Boyer (1968) señala que, a pesar de que los primeros acercamientos a la resolución de triángulos a través de resultados trigonométricos se remontan a las civilizaciones antiguas de Egipto y Babilonia, fue en realidad el interés surgido en Grecia por resolver problemas de astronomía, geografía, óptica y mecánica lo que fomentó su desarrollo, siendo el *Almagesto* de Ptolomeo la obra más importante en lo que respecta a la génesis de esta rama de las matemáticas.

A su vez, en las proposiciones 12 y 13 del Libro II de *Los Elementos de Euclides* ya podemos encontrar un principio emergente del teorema del coseno para los triángulos obtusángulos y acutángulos, respectivamente, que, como hacemos en la actualidad, eran demostrados mediante una doble aplicación del teorema de Pitágoras:

Proposición 12

En un triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es mayor que los cuadrados de los lados que forman el ángulo obtuso en dos veces el rectángulo contenido por uno de estos lados, aquel sobre el que cae la perpendicular trazada por otro de los vértices y la línea recta cortada en él por dicha perpendicular hacia el exterior desde el ángulo obtuso. (Boyer, 1986, p. 155)

Posteriormente, con claras influencias de los conocimientos alcanzados en Grecia, los estudios realizados por los astrónomos hindúes aportaron grandes avances, como, por ejemplo, la introducción de la función seno de un ángulo. Los árabes recogieron los avances griegos e hindúes y adoptaron tanto la geometría del *Almagesto* como las tablas hindúes de senos; sin embargo, la mayoría de los resultados trigonométricos desarrollados por estos están construidos sobre la base de la función seno. Fueron estos últimos los que hicieron llegar esta trigonometría a Europa y sus avances durante la Edad Media nos dieron la formulación que conocemos ahora (Boyer, 1986).

En el siglo XV el matemático Johann Müller, más conocido como Regiomontano o Joannis Regio Monte escribió *De Triangulis Omnimodis* un tratado que incluye los métodos para resolver triángulos con nociones derivadas del trabajo de Euclides, la demostración del teorema del seno (la ley de los senos) (figura 1) y problemas para determinar lados, ángulos y áreas de triángulos bajo unas determinadas condiciones. También incluye resultados sobre trigonometría esférica.

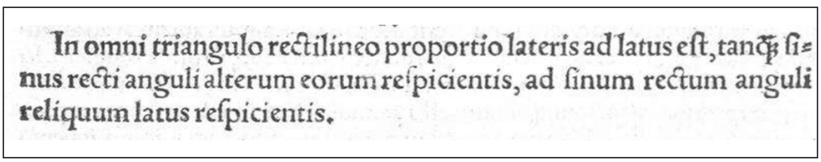

In omni triangulo rectilineo proportio lateris ad latus est, tanquam sinus recti anguli alterum eorum respicientis, ad sinum rectum anguli reliquum latus respicientis.

Figura 1. Ley de los senos en *De Triangulis Omnimodis* (Regio Monte, 1533, p. 46).

Pero fue realmente el francés François Viète el que aportó un enfoque analítico generalizado a la trigonometría partiendo de la herencia recibida de sus predecesores. En su obra, *Canon mathematicus seu ad triangula: cum appendicibus* (1579) elaboró tablas para las seis funciones trigonométricas (aunque no usó los mismos nombres que usamos en la actualidad, excepto para la función seno). En esta obra también podemos encontrar el teorema del coseno (ley de los cosenos) con una formulación similar a la que se suele usar en la actualidad (figura 2):

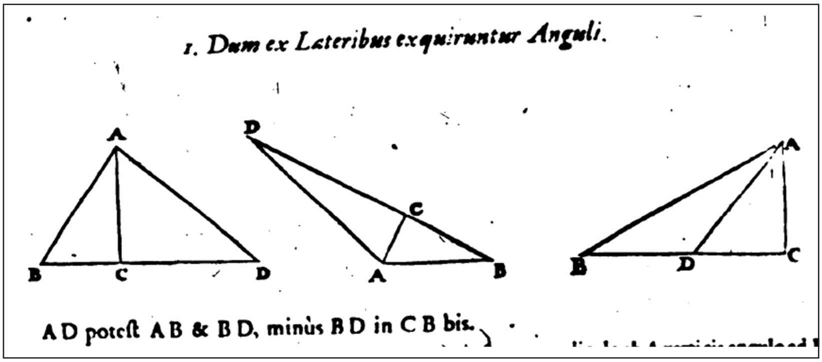


Figura 2. Ley de los cosenos en *Canon mathematicus seu ad triangula: cum appendicibus* (Viète, 1579, p. 14).

Viète introdujo también en un trabajo posterior titulado *Variorum de Rebus Mathematicis* (1593) una expresión equivalente al teorema de la tangente, y aunque probablemente fue el primero en usar este resultado en sus trabajos, no fue el primero en publicarlo, ya que el profesor de matemáticas alemán, Thomae Finkii lo incluyó en su obra *Geometriae Rotundi Libri XIV* (1583) (figura 3).

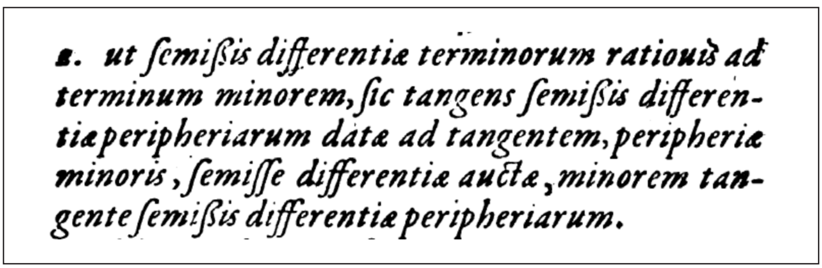

2. ut ſemißis differentiæ terminorum rationis ad terminum minorem, ſic tangens ſemißis differentiæ peripheriarum datæ ad tangentem, peripheriæ minoris, ſemiſſe differentiæ auctæ, minorem tangente ſemißis differentiæ peripheriarum.

Figura 3. Teorema de la tangente en *Geometriae Rotundi Libri XIV* (Frinkii, 1583, p. 282).

Tal y como señala Dorce (2017), la transferencia de conocimientos científicos entre España y el resto de Europa durante la segunda parte del siglo XVI estuvo limitada, debido a las políticas de Felipe II. Esto provocó que el nivel de las matemáticas no fuera demasiado elevado a pesar de que se promoviera la creación de instituciones como la Academia Real de Matemáticas que trataron de formar a expertos matemáticos necesarios para servir a la corona.

En ese contexto, los primeros libros impresos en castellano que incluyen contenidos geométricos son abordados de forma breve, y centrando su atención en cálculos de perímetros y áreas de figuras planas. No es hasta 1572 que podemos encontrar el *Tratado de Geometría Practica, y Speculativa* de Pérez de Moya que sigue los contenidos del *General trattato di numeri et mesure*, publicado por Tartaglia entre 1556 y 1560. En este se incluye una tabla para la función seno y trata sobre esta razón trigonométrica, aunque recomienda las lecturas de Ptolomeo y Copérnico para quien desee conocer su utilidad.

A principios del siglo XVII dos instituciones educativas lideraban el desarrollo de las matemáticas en España, el Colegio Imperial de Madrid, más tarde Reales Estudios de San Isidro, y la Universidad de Valencia. La primera, a cargo de la Compañía de Jesús de Madrid apostó por profesores extranjeros para mejorar la situación de la ciencia española, estos escribieron obras de geometría, óptica, fortificación y cosmografía. En la segunda destacó la figura del padre José Zaragozá y Vilanova, quien publicó numerosas obras con claras evidencias de interés por la didáctica de las matemáticas. Entre ellas destaca su *Tratado de Trigonometria española: resolución de los triangulos planos y esféricos, fabrica y uso de los senos y los logaritmos* publicado en 1672.

Durante el siglo XVIII se crearon numerosos centros cuyo propósito era el cultivo de las ciencias y las técnicas, apoyados por las políticas ilustradas de los reyes Felipe V y Fernando VI. Asimismo, las instituciones educativas religiosas se unieron a ese objetivo e incorporaron física, matemáticas y construcción a las enseñanzas en sus colegios (Garma, 1988). Con la expulsión de los jesuitas en 1767 aparecieron también instituciones civiles o militares en las que se enseñaban matemáticas, con lo que se necesitaron profesores laicos con conocimientos matemáticos, que sustituyeran a los religiosos. Se hizo necesario, pues, recopilar libros de texto extranjeros y escribir grandes tratados sobre geometría elemental y práctica, trigonometría rectilínea y esférica o cartografía, destinados a instruir a militares, marinos e ingenieros en estas instituciones (Gómez, 2011).

Es a principios del siglo XIX cuando una serie de reformas educativas crean la etapa de la segunda enseñanza que permitió, por un lado, mejorar el nivel educativo de la nación, y preparar para los estudios universitarios, por otro. A través de esta, se logra una mayor difusión de los saberes científicos, con la introducción de asignaturas de contenido exclusivamente matemático, en las que se estudiaba aritmética, álgebra, geometría y trigonometría a través de reediciones de libros de texto de autores como Lacroix, Vallejo, Lista, Odriozola o Juan Cortázar, entre otros (Vea, 1995).

3. Metodología

Este trabajo presenta la evolución de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto dedicados a la enseñanza de la trigonometría escritos en castellano y publicados en España. Se enmarca en el enfoque de investigación de tipo histórico y en el que usamos el análisis de contenido para examinar los datos. Esta técnica ha sido ampliamente utilizada en investigaciones anteriores (León-Mantero *et al.*, 2021; Madrid *et al.*, 2020).

La búsqueda de los libros de texto se realizó en: el Fondo Histórico de la Universidad de Córdoba y Sevilla, la Biblioteca Virtual Cervantes, la Biblioteca Virtual Andalucía, la Biblioteca Digital Hispánica de la Biblioteca Nacional de España, y en el repositorio digital de Google Books. En total se localizaron más de treinta obras, algunas de las cuales tuvieron que ser descartadas, porque o bien no fueron publicadas, o no se conserva ningún ejemplar, o hasta el momento, no han sido localizadas y no hemos podido acceder a ellas.

El listado completo de los libros analizados incluye *Trigonometría española, resolucion de los triangulos planos, y esfericos* del Padre Zaragoza (1672), *Architectura civil recta y obliqua* de Juan Caramuel (1678), *Architecto perfecto en el arte Militar* de Sebastián Fernández de Medrano (1700), *Elementos Mathematicos* del Padre Pedro de Ulloa (1706), *Compendio Mathematico* (tomo III) de Tomás Vicente Tosca (1727), *Tratado de Trigonometría plana general* de Juan Sánchez Reciente (1742), *Elementos de Mathematicas* (Tomo III) del Padre Wendlingen (1755), *Prácticas de geometría y trigonometría* de Pedro Giannini (1784), *Tratado de la Trigonometria plana y esferica* de Antonio Gabriel Fernández (1788), *Principios de Matemática de la Real Academia de San Fernando* (Segunda edición) de Benito Bails (1788), *Compendio de la Geometría elemental y Trigonometría* de Vicente Tofiño (1794), *Compendio de matemáticas puras y mixtas para instruccion de juventud* (tomo I) de Francisco Verdejo González (1794), *Curso de matematicas* de Tadeo Lope y Aguilar (1795), *Tratado elemental de Matemáticas* (volumen III) de José Mariano Vallejo (1812), *Curso de estudios elementales de la marina* (tomo II) de Gabriel Ciscar (1816), *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* de Silvestre Lacroix (1820), *Curso completo de matematicas puras* de José de García Odriozola (1827) y *Tratado de trigonometría rectilínea y esférica* de Juan Cortázar (1848).

Para su análisis, seguimos las recomendaciones incluidas en Maz (2009), es decir, se definieron como unidades de análisis los enunciados y posteriores resoluciones de todos los ejercicios y problemas sobre triángulos oblicuángulos presentes en los libros de texto, se leyeron, se categorizaron y se procedió a su análisis cuyos resultados recogemos a continuación.

4. Resultados

Antes de describir los resultados hallados, advertimos que la grafía, acentuación y puntuación de los ejemplos incluidos a continuación han sido respetadas de la fuente original. Asimismo, debido a que las fechas de publicación entre los textos varían en más de cien años, podemos encontrar términos, como, por ejemplo, *triángulo*, escritos en algunas ocasiones sin tilde y en otras con tilde.

El análisis de los métodos de resolución de triángulos oblicuángulos en los libros de texto consultados nos permitió dividir en dos periodos bien diferenciados cómo fue su incorporación a la enseñanza de la trigonometría a lo largo de los años. El punto de inflexión lo encontramos en la publicación en España de la versión traducida por Josef Rebollo y Morales del *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* de Silvestre Lacroix en 1807 y en la inclusión del teorema del coseno como resultado principal del método de resolución. Hablamos así de un primer periodo basado en una concepción geométrica de los resultados trigonométricos y un segundo periodo que en el que las relaciones trigonométricas trascienden a un plano algebraico y analítico tal y como procedemos en la actualidad. Veamos detenidamente las características de los métodos en ambos periodos.

4.1. Periodo 1, hasta 1807: enfoque geométrico

Todos los autores consultados dan definiciones similares de *trigonometría rectilínea*, *plana* o *llana*, como la «Ciencia que enseña á resolver los triangulos rectilíneos» (Tofiño, 1794, p. 115). «Enseña, pues, [...] como se responde en todos los casos posibles esta pregunta: Dadas tres de las seis cosas que en un triángulo rectilineo se consideran (los tres ángulos y los tres lados), hallar el valor de las otras tres» (Bails, 1788, p. 321). Esta rama se divide en Rectangula y Obliquangula. «La Rectangula trata de los triangulos rectangulos rectilineos; y la Obliquangula de los triangulos obliquangulos» (Fernández, 1788, p. 21). En este trabajo centramos nuestra atención en la resolución de triángulos oblicuángulos, a saber, «todo aquel que no tiene ningún ángulo recto» (Bails, 1788, p. 336).

> En qualquier Triangulo lo 1.° ſon proporcionales los lados à los Senos de los Angulos, que les eſtàn opueſtos. Lo 2.° la Summa de dos lados es à la diferencia de ellos como la Tangente de la Ss. de los Angulos opueſtos à la Tangente de la Sd. de los miſmos. Lo 3.° el lado Maximo es à el aggregado de los otros dos, como la Diferencia de eſtos à la Diferencia de los Segmentos que haze en el lado Maximo la Perpendicular que cae ſobre èl deſde el angulo opueſto.

Figura 4. Proposición Universal (De Ulloa, 1755, p. 276).

Con respecto a las proposiciones teóricas que sirven como base para la posterior resolución de los ejercicios propuestos, destaca que, a excepción del texto de Fernández de Medrano (1700), los libros de este periodo contienen los mismos resultados matemáticos con relación a los triángulos oblicuángulos. El Padre Pedro de Ulloa (1755) los resume en lo que llama *Proposición Universal* (figura 4), ya que, al ser válido para cualquier tipo de triángulo rectilíneo, también es aplicable para triángulos rectángulos. El lado mayor del triángulo suele ser llamado *lado Maximo*, *base* o *basa*.

En palabras de Tofiño (1794), esta proposición se desglosa en tres teoremas:

> Teorema I. En qualquier Triangulo rectilineo ABC, los lados AB, BC, son proporcionales con los Senos de los Angulos opuestos C y A. (Tofiño, 1794, p. 126)

> Teorema II. En todo triangulo rectilineo ABC, la suma de dos lados AB, BC, á su diferencia, tiene la misma razón que la Tangente de la mitad de la suma de los angulos opuestos A y C, á la Tangente de la mitad de la diferencia de dichos angulos. (Tofino, 1794, p. 127)

> Teorema III. En qualquier triangulo ABC, la base ó lado mayor BC, á la suma de los lados BA, AC tiene la misma razón, que la diferencia de los mismos lados, á la diferencia de los segmentos BE, EC, que hace la perpendicular AE en la base BC. (Tofiño, 1794, p. 129)

Estos tres teoremas permiten resolver los siguientes tipos de ejercicios (tabla1):

Tabla 1. Tipos de ejercicios y teoremas para su resolución.

Ejercicio 1. «resolver un triángulo, 1°. quando son conocidos dos ángulos y un lado; 2°. quando son conocidos dos lados y un ángulo opuesto al uno de ellos» (Bails, 1788, p. 336)	Teorema I
Ejercicio 2. «Por los tres lados conocidos de un triángulo determinar los ángulos» (Bails, 1788, p. 339)	Teorema III
Ejercicio 3. «resolucion de un triángulo quando se conocen dos de sus lados y el ángulo que forman» (Bails, 1788, p. 341)	Teorema I y teorema II

Así, Tofiño (1794) propone resolver el triángulo, «dados dos lados (AB de 300 pies, y AC de 400), y el ángulo comprehendido (A de 61 grados y 16 minutos)» (p. 135). La resolución dada por el autor es la siguiente:

- Para hallar los ángulos *B* y *C*, aplicamos el teorema II. La suma de los lados *AB* y *AC* (700) es a la diferencia de los mismos (100), como la tangente de la semisuma de *B* y *C*, a la tangente del ángulo de la semidiferencia. Pero como la semisuma de *B* y *C* es igual a la mitad de la diferencia entre 180 grados y *A*, es decir, 59 grados y 22 minutos, entonces el ángulo de la semidiferencia es 13 grados y 34 minutos.

$$\frac{B+C}{2}=\frac{180°-A}{2}=59°22' \rightarrow \frac{700}{100}=\frac{tg(59°22')}{tg\left(\frac{B-C}{2}\right)} \rightarrow \frac{B-C}{2}=13°34'$$

- Sumando las cantidades de la semisuma de *B* y *C*, y la semidiferencia de *B* y *C*, obtenemos *B*, es decir, 72 grados y 56 minutos. Si ahora restamos la semisuma de *B* y *C* a la semidiferencia, obtenemos *C*, es decir, 45 grados y 48 minutos.

$$\frac{B+C}{2}+\frac{B-C}{2}=B=72°56' \text{ y } \frac{B+C}{2}-\frac{B-C}{2}=C=45°48'$$

- Aplicando el teorema I, *AB* (300) es a *BC* como el seno de *C* es al seno de *A*; por tanto, *BC* es:

$$\frac{300}{BC}=\frac{sen\,45°48'}{sen\,61°16'}\rightarrow BC=366{,}94\ pies$$

Huelga decir que este método de resolución se basa íntegramente en las relaciones de semejanza que existen entre las razones trigonométricas de los ángulos y los lados del triángulo.

Entre las características que podemos encontrar en los libros publicados en este periodo, observamos que se definen y se hace uso exclusivo del seno, tangente y secante, a excepción del texto de Lope y Aguilar (1795) que ya habla de las seis razones trigonométricas.

Los razonamientos usados en las demostraciones de los teoremas necesarios para la aplicación del método de resolución se basan en la búsqueda de triángulos semejantes que permiten establecer relaciones de proporcionalidad (figura 5).

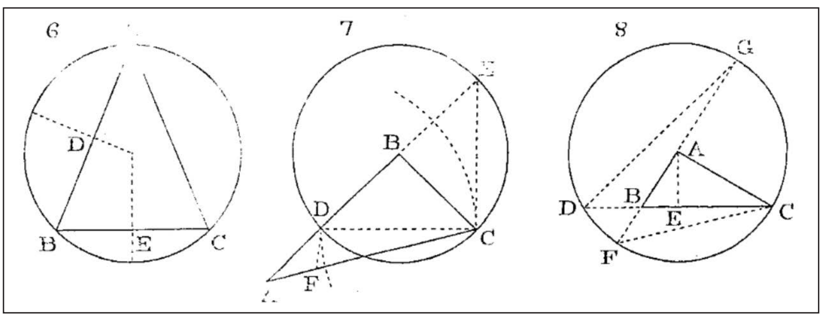


Figura 5. Representación que apoya a la demostración de los teoremas I, II y III (Tofiño, 1794).

Con respecto a los ejercicios propuestos en los textos, los autores utilizan la misma estructura en su formulación; de hecho, en ocasiones, aunque realizan pequeños cambios en el enunciado, replican de forma íntegra los datos dados en los ejercicios diseñados por sus predecesores. Por ejemplo, en Tofiño (1794) se incluye más de un siglo después el problema III que propuso Zaragoza (1672) en su *Trigonometría española*. En otros casos, se modifican los valores de los lados de tal forma que sean proporcionales a los originales, obteniendo, por tanto, los mismos valores de los ángulos. Llama la atención que no se proponen problemas sobre triángulos oblicuángulos para resolver, podemos encontrar exclusivamente ejercicios.

Por otro lado, el Padre Wendlingen (1755) y Tofiño (1794) desglosan la resolución de ejercicios en dos secciones, por un lado, la resolución de triángulos acutángulos y, posteriormente, se estudian casos de triángulos obtusángulos.

Por último, hemos de señalar que, tal y como comentamos anteriormente, Fernández de Medrano (1700), en su obra *Architecto perfecto en el arte Militar*, resuelve los ejercicios que hemos denominado *de segundo tipo* mediante otro método al visto en el resto de los libros, a saber, calcula los ángulos del oblicuángulo trazando la altura sobre el lado mayor y usando las propiedades de Geometría elemental para hallar las dos proyecciones sobre la hipotenusa. De esa forma puede aplicar la definición del seno en los dos triángulos rectángulos en los que ha dividido al triángulo dado.

4.2. Periodo 2, a partir de 1807: enfoque algebraico

Como ya habíamos adelantado, el primer libro escrito en castellano y publicado en España en el que se introduce por primera la formulación del teorema del coseno tal y como lo conocemos hoy es en una edición traducida de 1807 del *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* escrita por el francés Silvestre Lacroix (figura 6).

Es importante indicar que Lacroix no abandona el teorema de la tangente; sin embargo, el método de resolución de triángulos oblicuángulos que elige para resolver triángulos oblicuángulos es el que nuestros actuales libros de texto exponen.

Este método se va incorporando paulatinamente en los libros de texto del siglo XIX. No ocurre así en los primeros años tras la publicación; por ejemplo, los textos de Vallejo (1812) y Císcar

Antes de exponer los ejemplos de la resolucion de los triángulos rectilíneos haremos la observacion siguiente.

La ecuacion

$$\cos.\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}$$

nos dice que *en todo triángulo rectilíneo el coseno de un ángulo es igual á la suma de los cuadrados de los lados que forman dicho ángulo, menos el cuadrado del lado opuesto, dividido todo por dos veces el rectángulo de los lados que forman el ángulo de que se trata;* por lo mismo de cualquier triángulo rectilíneo se podrán deducir las tres ecuaciones

$$\cos.\ A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,bc}, \quad \cos.\ B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,ac}$$

$$\cos.\ C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\,ab}.$$

Figura 6. Teorema del coseno en el *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* de Lacroix (1807, p. 54).

(1816) siguen abordando el método usando los tres teoremas de la proposición universal. Tendremos que esperar a 1827 para ver el primer texto de un español en el que aparece la formulación actual del teorema del coseno y, por tanto, su aplicación en el método de resolución de triángulos. Se trata del *Curso completo de matemáticas puras*, de Odriozola (1827). Es importante matizar que, en la resolución de los triángulos, el autor usa implícitamente el teorema del coseno, ya que, a partir de este y de la relación que se da entre las razones seno y coseno, obtiene una ecuación equivalente.

Caracteriza a este periodo que las demostraciones se realizan a través de las relaciones analíticas entre las diferentes razones trigonométricas. La definición y el uso de las seis razones se generalizan. Así, comienzan también a enunciarse y demostrarse las fórmulas del ángulo doble o mitad o la más que conocida identidad:

$$sen^2x + cos^2x = 1$$

Al igual que Lacroix, en los libros de texto publicados durante el siglo XIX no se abandonan en ningún momento los teoremas de la proposición universal, pero sí empiezan a aparecer diferentes alternativas para resolver los mismos triángulos usando el teorema del coseno, que, además, permiten reducir el número de pasos.

5. Conclusiones

La primera idea que nos gustaría esgrimir es que, tres siglos después, los enunciados de los ejercicios que hemos encontrado en los libros de texto de los siglos XVII, XVIII y XIX son análogos a los que podemos encontrar hoy en día. Sin embargo, no nos sorprende tanto si pensamos en la propia definición de *trigonometría rectilínea* y en su búsqueda por hallar tres de los elementos de un triángulo conocidos los otros tres.

Por otro lado, a pesar de las similitudes en los enunciados, encontramos grandes diferencias en su resolución. No cabe duda de que la introducción del teorema del coseno en la enseñanza de la resolución de triángulos redujo significativamente el número de pasos dedicados a obtener la solución, pero a lo largo de todos estos años ha supuesto la algebrización de un método que tuvo su base en la semejanza de triángulos y la evidente desaparición del teorema de la tangente de los libros de textos actuales, a pesar de ser contenido oficial del currículo de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato en España.

De nuevo surge la idea de la importancia de traer a España la ciencia europea durante los siglos XVIII y XIX y la gran labor de los autores que tradujeron, adaptaron al sistema educativo vigente y difundieron en sus clases y a través de sus libros de texto, los avances matemáticos que habían sido desarrollados en Europa.

Por último, queremos señalar que, si bien hemos analizado la evolución de los métodos de resolución de triángulos en los libros de texto, eso no significa que ese conocimiento matemático fuese incorporado a la enseñanza de la materia de forma inmediata. Del mismo modo que los autores españoles fueron incorporando paulatinamente el teorema del coseno en sus obras, el uso de estos libros de texto en las instituciones en las que se estudiaba matemáticas también lo fue.

6. Referencias

Bails, B. (1788). *Principios de Matematica de la Real Academia de San Fernando*. Imprenta de la viuda de Ibarra.

Boyer, C. (1986). *Historia de las Matemáticas*. Alianza.

Christianidisa, J. y Megremi, A. (2019). Tracing the early history of algebra: Testimonies on Diophantus in the Greek-speaking world (4th-7th century CE). *Historia Mathematica*, *47*, 16-38.

Císcar, G. (1816). *Curso de estudios elementales de la marina* (tomo II). Imprenta Nacional.

D'Enfert, R. y Búrigo, E. Z. (2019). Ensino de matemática nas escolas normais primárias francesas, 1830-1848: desafios sociais e culturais para a formação de professores primários. *Educação*, *42*(2), 165-177. https://doi.org/10.15448/1981-2582.2019.2.34111

Dorce, C. (2017). *Historia de las Matemáticas en España*. Arpegio.

Dündar, S. (2015). Mathematics Teacher-Candidates' Performance in Solving Problems with Different Representation Styles: The Trigonometry Example. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *11*(6), 1379-1397. https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1396a

Fernández, A. G. (1788). *Tratado de la Trigonometria plana y esferica*. Oficina de Vázquez, Hidalgo y Compañía.

Fernández de Medrano, S. (1700). *Architecto perfecto en el arte Militar*. Editorial de Bruselas.

Finkii, T. (1583). *Geometriae Rotundi Libri XIV*. Sebastianum Henricpetri

Furinghetti, F. (2012). History and epistemology in mathematics education. En: Hansen, V. L. y Gray, J. (eds.). *History of mathematics, in Encyclopedia of Life Support Systems* [e-book]. EOLSS.

Garma, S. (1988). Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. En: Sánchez, J. M. (ed.). *Ciencia y sociedad en España* (pp. 93-127). El Arquero.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon*, *28*(1), 9-22.

Gómez, B. (2018). Uso de la historia en la educación matemática: El caso de los gemelos póstumos. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, *1*(1), 11-21.

Gur, H. (2009). Trigonometry Learning. *New Horizons in Education*, *57*(1), 67-80.

Karp, A. (2014). The history of mathematics education: developing a research methodology. En: Karp, A. y Schubring, G. (eds.). *Handbook on the history of mathematics education* (pp. 9-24). Springer.

Lacroix, S. (1807). *Tratado elemental de Trigonometría rectilínea y esférica* [traducida por D. Josef Rebollo y Morales]. Imprenta Real.

León-Mantero, C., Maz-Machado, A. y Madrid, M. J. (2021). El *Tratado de Álgebra elemental* de Juan Cortázar: un libro significativo para la enseñanza de las matemáticas en España. *Educatio Siglo XXI*, *39*, 235-256. http://dx.doi.org/10.6018/educatio.469251

Lope y Aguilar, T. (1795) *Curso de matemáticas.* Imprenta Real.

Madrid, M. J., López-Esteban, C. y Jiménez-Fanjul, N. (2020). La enseñanza de las matemáticas en la Academia de Guardiamarinas de Cádiz: una visión a partir de tres libros clave. En: Maz-Machado, A. y López-Esteban, C. (eds.). *Las matemáticas en España durante el siglo XVIII a través de los libros y sus autores* (pp. 93-113). Ediciones Universidad de Salamanca.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos XVIII y XIX. *RELIME, Revista latinoamericana de Investigación Educativa, 18*(1), 49-76.

Maz, A. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En: González, M. J., González, M. T. y Murillo, J. (eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5-20). SEIEM.

Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2020). Análisis de los prólogos de los textos algebraicos publicados en España durante el siglo XVI. *Historia y Memoria de la Educación, 11*, 51-85.

Odriozola, J. (1827). *Curso completo de matemáticas puras*. Imprenta que fue de García.

Picado, M., Rico, L. y Gómez, B. (2013). El sistema métrico decimal en textos de matemáticas para la instrucción primaria en las Islas Canarias en el siglo XIX. *NÚMEROS. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 82*, 37-53.

Puig, L. (1994) El De Numeris Datis de Jordanus Nemorarius como sistema matemático de signos, *Mathesis, 10*, 47-92.

Regio Monte, I de. (1533). *De Triangulis Omnimodis.* In aedibus Io. Petrei.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2002). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática, 15*(1), 21-49.

Schubring, G. (2006). Researching into the history of teaching and learning mathematics: The state of the art. *Paedagogica Historica,42*(4-5), 665-677.

Tofiño, V. (1794). *Compendio de la Geometria elemental y Trigonometria rectilinea para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas en su academia*. Imprenta de la Real Academia.

Ulloa, P. de (1706). *Elementos Mathematicos*. Antonio Gonçalez de Reyes.

Vallejo, J. M. (1812). *Tratado elemental de Matemáticas* (volumen III). Imprenta de Melchor Guasp

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la enseñanza secundaria en España (s. XIX)*. Universidad de Zaragoza.

Viète, F. (1579). *Canon mathematicus seu ad triangula: cum appendicibus*. Apud Ioannem Mettayer

Viète, F. (1593). *Variorum de Rebus Mathematicis.* Apud Iamettium Mettayer.

Wendlingen, J. (1755). *Elementos de Mathematicas (Tomo III).* Oficina de Joachin Ibarra.

Zaragoza, J. (1672). *Trigonometría española, resolucion de los triangulos planos, y esféricos*. Francisco Oliver.

12

Estrategias de estimación en futuros maestros

Pre-Service teachers' Estimation Strategies

José L. Lupiáñez,[1] Juan F. Ruiz-Hidalgo[1] Johan Espinoza[2] y Luis Rico[1]
[1]Universidad de Granada, [2]Universidad Nacional de Costa Rica

Resumen
En este trabajo se analizan, primeramente, algunas consideraciones relevantes que surgen a partir de la definición de *estimación* y se describen tres destrezas básicas y dos tipos de estrategias de estimación. Luego se presenta un estudio que contrasta los procedimientos seguidos por un grupo de futuros maestros al resolver tareas de estimación de medidas, con las estrategias que indican explícitamente y su relación con los procedimientos ejecutados. Los resultados informan que, para las magnitudes fundamentales, los estudiantes estiman usando estrategias de conocimiento de referentes o de interiorización de unidades básicas, acompañadas siempre de estrategias de comparación, mientras que para la magnitud de área recurren a la magnitud auxiliar longitud y a referentes de longitud y a técnicas indirectas. Por último, se concluye que existen escasa relación entre las estrategias que explican y las que expresan.

Palabras clave: estimación de medidas, estrategias, maestros en formación, tareas

Abstract
In this work, firstly, some relevant considerations that arise from the definition of estimation are analyzed and describe three basic skills and two types of estimation strategies. Then, a study is presented that contrasts the procedures followed by a group of future teachers when solving measurement estimation tasks, with the strategies that they explicitly indicate and their relationship with the procedures performed. The results report that for the fundamental magnitudes, the students estimate using strategies of knowledge of referents or of internalization of basic units, always accompanied by comparison strate-

gies, while for the magnitude of area they resort to the auxiliary magnitude length and referents of length and indirect techniques. Finally, we conclude that there is little relationship between the strategies they explain and those they express.

Keywords: measurement estimation, strategies, teachers in training, tasks

1. Introducción

La mayor parte de las personas realizamos estimaciones sobre medidas varias veces al día, casi sin ser conscientes de ello. El tiempo que nos va a tomar ir al trabajo, la cantidad que necesitamos de un determinado producto o el precio final que va a tener un producto que disfruta de un descuento son solo algunas situaciones cotidianas en las que realizar buenas estimaciones resulta muy práctico en el mundo en el que vivimos. Esa capacidad de estimar es objeto de enseñanza en la matemática escolar, y el profesor Isidoro Segovia ha realizado notables contribuciones en este campo de la investigación en Didáctica de la Matemática. Los sujetos con los que hemos trabajado son futuros maestros que han tenido como formador a Pablo Flores, todo un ejemplo de rigor, seriedad y calidad en su trabajo. Con mucho afecto y no menos modestia, le dedicamos este capítulo a estos dos valiosos compañeros y amigos.

La estimación en matemáticas se puede definir como:

> [...] el juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite. (Segovia *et al.*, 1989, p. 18)

De esta definición se desprenden varias consideraciones relevantes. Por una parte, se trata de que una persona proponga el resultado de una operación aritmética o la cantidad de una determinada magnitud que presenta un objeto. Surgen, así, dos actividades de estimación básicas, computacional y de medidas, que hoy en día en la literatura de investigación se amplían a cuatro. Además de las anteriores, se habla de *estimación de cantidad* (numerosidad) y *estimación de la recta numérica* (Sunde *et al.*, 2021). Esta última se aplica, fundamentalmente, cuando un sujeto ubica determinados números en la recta numérica. En este trabajo nos centramos en la estimación en medida y, como señalan estos mismos autores, la estimación de medida es probablemente la más extendida en otras disciplinas, como ciencias, ingeniería y tecnología.

La segunda consideración relevante de la definición anterior es que se trata de un juicio de valor y que, por tanto, en el caso de la estimación en medida no se contempla el uso de herramientas específicas de medición. Así, en la mayor parte de las ocasiones esta particularidad se hace efectiva, porque este tipo de estimación se realiza en:

> [...] situaciones cotidianas en las que el cálculo o la medición precisos se definen contextualmente como imposibles o innecesarios. (Forrester y Pike, 1998, p. 334)

En esta línea, Segovia *et al.* (1998) presentan tres tipos de medidas en las que se da esa circunstancia: estimar valores que no se pueden conocer *a priori*, como indicadores socioeconómicos, valores que suelen variar con frecuencia, como la temperatura, o medidas que tienen determinadas limitaciones, como imperfecciones que imposibilitan una medida precisa.

Finalmente, la definición inicial subraya el hecho de que ese juicio de valor se emite bajo el condicionamiento de circunstancias individuales. Como señala Sowder (1992), el individuo debe invocar varias formas de referentes mentales para proporcionar una medida de la magnitud en cuestión. Segovia *et al.* (1998) sostienen que «las intuiciones y experiencias propias del sujeto que hace la estimación tienen una importancia destacada» (p. 18). Como veremos más adelante, las estrategias de estimación de medidas consideran de manera expresa esos referentes, intuiciones y experiencias.

Segovia y sus colaboradores también destacan que la estimación de medidas es educable, en el sentido de que, con una planificación docente cuidada, se puede lograr que los estudiantes desarrollen sus habilidades de estimación. De hecho, la estimación tiene presencia constante en el currículo de matemáticas de numerosos países, entre ellos España, en donde se incluye en uno de los objetivos de la Educación Primaria:

> Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana. (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2014, p. 7)

Este vínculo de la estimación de medidas con la resolución de problemas se ha refrendado en algunos estudios en los que, por ejemplo, se ha constatado que el desarrollo de habilidades de estimación tiene una implicación positiva en el rendimiento matemático escolar (Kramer *et al.*, 2018). Para Sunde *et al.* (2021), el papel de la estimación en el aprendizaje escolar de las matemáticas se justifica desde dos puntos de vista. El primero, desde una mirada psicológica, se refiere al papel de la estimación en el aprendizaje de varios temas matemáticos, junto con su potencial para identificar problemas de desarrollo cognitivo. El segundo, más pragmático, se refiere a la importancia que tiene la estimación en diferentes contextos del mundo real.

La investigación también ha indagado el logro de las habilidades de estimación de escolares. Así, Desli y Giakoumi (2017) señalan que los estudiantes de Primaria no son especialmente competentes estimando longitudes de objetos, aunque suelen ser más precisos si emplean unidades convencionales. Joram *et al.* (2005) afirman que la razón por la que los escolares no desarrollan por completo esas habilidades de estimación es que no se trabajan de manera adecuada en el aula, y eso se atribuye, por lo general, a la falta de confianza de los propios maestros.

En este trabajo presentamos un estudio realizado con futuros maestros en el que deben resolver una serie de tareas de estimación de medidas y detallar las estrategias que aplican para obtener sus resultados.

2. Estrategias de estimación de medidas

Joram *et al.* (2005) sostienen que el desarrollo de estrategias específicas de estimación de medidas es clave para promover un desempeño consistente de los sujetos en este tipo de tareas. Segovia *et al.* (1998) proponen una serie de estrategias que deben ser objeto de trabajo en el aula, y que tienen una componente subjetiva relevante, ya que:

> [...] conllevan la elección de un término de comparación o unidad de referencia y el establecimiento de una relación sensata entre la cantidad a estimar y la unidad. (p. 153)

Estas estrategias se dividen en unas destrezas básicas (*interiorización*, *establecer referentes* y *técnicas indirectas*) y dos tipos de estrategias de estimación propiamente dichas: *comparación* y *descomposición/recomposición*. Las definimos a continuación.

2.1. Interiorización

Esta destreza se centra en la interiorización de las unidades de medida de magnitudes básicas. Si consideramos, por ejemplo, la longitud, se trataría de tener una referencia perceptiva de lo que es un centímetro, un decímetro, un metro, etc. Pero también es igualmente útil conocer objetos o partes del cuerpo cuyas longitudes sean las de esas unidades. Como Segovia *et al.* (1989) señalan:

> Diremos que una unidad de longitud está interiorizada cuando un niño es capaz de reconocerla, construirla o señalar dimensiones y distancias cuya longitud sea aproximadamente la de cada una de estas unidades. (p. 153)

2.2. Establecer referentes

El establecimiento de referentes consiste en conocer algunas medidas próximas a la actividad del individuo, tanto del propio cuerpo como de objetos cercanos a su actividad cotidiana. Establecer una asociación entre las dimensiones de determinados objetos con unidades de medida de algunas magnitudes facilita la estimación. Para promover esta destreza en los escolares, es necesario brindarles un abanico amplio de referentes para diferentes magnitudes.

2.3. Técnicas indirectas

También es útil para estimar medidas el conocimiento de fórmulas y relaciones fundamentales. Estableciendo algunas longitudes con otras estrategias de estimación, después se pueden aplicar fórmulas de perímetros, áreas o volúmenes, o se pueden relacionar datos mediante el teorema de Thales, el de Pitágoras, o la desigualdad triangular, entre otros resultados. En esta destreza también cobra protagonismo el cálculo mental para llevar a cabo muchos de esos cálculos y relaciones.

2.4. Comparación

La comparación resulta fundamental en la estimación de medidas. Está basada en el uso de unidades estándar o de referencias propias un determinado sujeto (Segovia *et al.*, 1989, p. 162). Esa comparación puede ser de tres tipos, según se concrete la relación entre la unidad de referencia y la cantidad que hay que estimar: cantidad a estimar igual que la unidad (aproximadamente), cantidad como múltiplo de la unidad o cantidad como divisor de la unidad. En el primer caso, se realizan ajustes tras la estimación al alza o a la baja, mientras que en las otras dos situaciones o bien la comparación permite estimar que la unidad cabe varias veces dentro de la cantidad, o bien cuántas partes de la unidad ocupa la cantidad.

2.5. Descomposición y recomposición

Esta estrategia cobra relevancia cuando es necesario estimar una cantidad que se puede dividir en varias partes o elementos. En ocasiones estas particiones son claramente visibles, como en un edificio, y otras porque alguna parte del objeto está oculta, pero se conoce una relación con lo visible (como un iceberg). Primero es necesario hacer esa descomposición mentalmente, después se establecen comparaciones para las cantidades específicas y luego se hace una valoración final de las cantidades.

3. Metodología

Abordamos un trabajo de enfoque cualitativo, con un alcance de naturaleza exploratoria y descriptiva (Cohen *et al.*, 2011), ya que propone un acercamiento inicial al desempeño y al alineamiento entre las habilidades de estimación conocidas por los futuros docentes, con las habilidades puestas en juego ante una situación práctica. Además, no se pretende establecer inferencias, sino simplemente describir lo observado.

3.1. Los sujetos y la formación recibida

Los sujetos observados en el trabajo son estudiantes de primer curso del grado en Educación Primaria, de la Universidad de Granada durante el curso 2018-2019. La muestra se ha elegido por disponibilidad y con la condición de que los estudiantes fuesen presenciales.

Como características habituales de estos estudiantes, no hay muchos repetidores, por lo que se trata de estudiantes que se acaban de incorporar a la Universidad. En general, estos estudiantes están motivados, si bien en la mayoría de los casos su conocimiento de las matemáticas es deficiente; incluso, en algunos casos, la consideración hacia la materia es de haber sufrido rechazo hacia la misma, que se manifiesta en la baja autoconfianza y la alta ansiedad que les provocan las matemáticas (Sánchez-Mendías *et al.*, 2020).

La formación académica que poseen los estudiantes es la de una persona que acaba de acceder al grado que ha cursado los estudios de Enseñanza Secundaria y ha superado las pruebas de acceso a la universidad.

La formación matemática recibida durante el primer curso se desarrolla en la materia Bases Matemáticas para la Educación Primaria, con 9 créditos ECTS asignados, de carácter obligatorio y que se imparte en el primer semestre del título. En ella, los estudiantes se enfrentan a los contenidos de las matemáticas de la Educación Primaria desde una perspectiva de la profundización y ampliación de los significados de dichos contenidos. Más específicamente, esta materia se centra en el estudio, análisis y reflexión de los conceptos y procedimientos matemáticos de los bloques de matemáticas de Educación Primaria, de sus formas de representación y modelización (incluyendo materiales y recursos), de su fenomenología y de algunos aspectos históricos de los mismos, pero siempre desde la perspectiva del conocimiento y las competencias que debe desarrollar un profesor para el ejercicio de su labor docente.

El modelo de formación que reciben refleja un enfoque funcional de las matemáticas escolares, que considera que los conceptos y los procedimientos tienen un para qué cercano y se pueden usar para algo tangible, como se postula en el actual currículo, en el que el conocimiento matemático ha de plantear y responder a cuestiones reales, y resolver problemas en diferentes contextos, es decir, desarrollar competencias que permitan dotar de sentido a los contenidos matemáticos (Rico y Díez, 2011).

En líneas generales, la materia se desarrolla en dos partes diferenciadas: las sesiones de gran grupo (dos semanales de 1,5 horas); y las sesiones de pequeños grupos o seminarios prácticos (de una hora semanal). Los contenidos teóricos y prácticos se describen en la tabla 1.

Tabla 1. Contenidos teóricos y prácticos de Bases Matemáticas para la Educación Primaria.

Contenido teórico	**Contenido práctico**
El número natural. Sistemas de numeración	Aritmética
Aritmética	
Números racionales	
Figuras geométricas	Geometría
Transformaciones geométricas planas. Orientación espacial	
Magnitudes y su medida	Magnitudes y medida
Introducción a la estadística y a la probabilidad	Estadística y probabilidad

Este trabajo se centra en el tema dedicado a las magnitudes y su medida, en el que el contenido detallado es:

- Teórico: magnitudes y su medida. Idea de *magnitud*. Cantidad. Tipos de magnitudes. Las magnitudes longitud, superficie, volumen, amplitud, capacidad, tiempo y dinero. Medida

directa de magnitudes; sistemas de unidades de medida; evolución histórica Medida indirecta de magnitudes: proporcionalidad aritmética y geométrica. Estimación y aproximación en la medida.
- Práctico: magnitudes y medida. Medidas directas e indirectas; instrumentos de medida; sistema métrico decimal.

3.2. Fuentes de información

Recogemos la información de las producciones de los grupos de estudiantes al realizar la práctica relativa a magnitudes y su medida. A los estudiantes se les facilita una descripción detallada de las capacidades y destrezas básicas de las que conviene disponer para realizar estimaciones razonables en medida, que hemos detallado al inicio, y se les pide que realicen estimaciones de diversas cantidades de magnitud, además de pedir que indiquen qué destrezas emplean cuando las abordan. Así, por ejemplo, algunas de las cantidades de magnitud que se les pide estimar son la masa de una lenteja o el grosor de un folio de papel.

Durante la sesión trabajan en pequeños grupos y, con ayuda del docente, completan la práctica. Posteriormente, ya de manera grupal, pero sin supervisión del docente, deben elaborar un informe o un trabajo similar que entregan pasados unos días.

Así, la fuente de información que utilizamos en este estudio es el trabajo grupal entregado por los estudiantes correspondiente a la práctica de Magnitudes y su medida como respuesta a la pregunta que aparece en la figura 1.

Analizamos en este trabajo las producciones de 16 grupos de la misma clase, que asistían a tres seminarios. Codificamos como G11 a G15 a los grupos que asistían al primer seminario, G21 a G26 a los que asistían a los del segundo y G31 a G35 a los del tercero. No existen diferencias entre los estudiantes que pertenecen a cada seminario.

3.3. Análisis de las respuestas

Analizamos de manera cualitativa, para cada uno de los procedimientos de estimación proporcionados por los grupos tanto las estrategias de estimación que expresan en sus explicaciones como la relación existente entre sus explicaciones y las estrategias de estimación que mencionan explícitamente.

Describe los procedimientos de medida y de estimación más adecuados en cada caso, seleccionados entre los que han empleado los miembros del equipo para obtener las medidas de los objetos realizadas en la fase de trabajo individual: área de la figura inferior, capacidad de la papelera, volumen del aula, peso de una silla, peso de una canica y grosor de un folio.

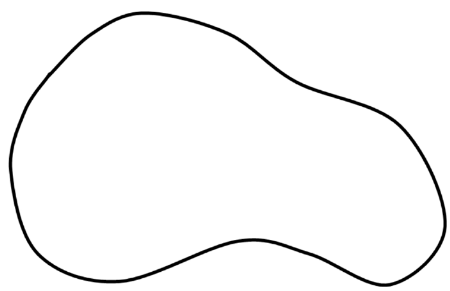


Figura 1. Pregunta planteada en el cuadernillo de trabajo grupal.

4. Resultados

Como resultados comunes para todas las preguntas, destacamos que ninguna de las respuestas proporciona la estimación de la cantidad de magnitud, sino que son de carácter descriptivo y están redactadas verbalmente. En ellas, los grupos describen esquemáticamente el proceso seguido y, en pocos casos, indican las estrategias de estimación que han usado.

Atendiendo a los procedimientos descritos, las respuestas se pueden agrupar según las estrategias de estimación usadas, aunque estas no estén mencionadas explícitamente. Organizamos las aportaciones de los grupos, para cada pregunta, atendiendo a las estrategias de estimación. Para ello, debido a la poca precisión de las respuestas, para cada pregunta describimos: 1) los procedimientos seguidos por los grupos, y 2) las estrategias que indican explícitamente y su relación con los procedimientos ejecutados.

4.1. Estimación del grosor de un folio: procedimiento seguido

En esta tarea se solicita que se estime el grosor de un folio A4 de papel. La magnitud involucrada, la longitud, es fundamental, por lo que no se espera que los estudiantes utilicen magnitudes auxiliares ni técnicas indirectas como cálculos.

El conjunto más numeroso de respuestas está formado por aquellos grupos (8 de 16) que utilizan la interiorización de unidades básicas, generalmente 1 mm, aunque uno de los grupos indica que es 1 cm y otro de los grupos no expresa la unidad. Todos los grupos, salvo uno, complementan la interiorización con la técnica de comparación. Es el grupo G25 el que, en lugar de hacer una comparación de su referente (1 mm) con el grosor del folio, hace un proceso de composición de cantidades de magnitud al apilar folios hasta que consideran que han llegado a 1 mm. Esto les exige en una última fase dividir 1 mm entre la cantidad de folios apilados.

Un segundo conjunto de respuestas incluye a los grupos (3 de 16) que utilizan el conocimiento de referentes. Para dos de estos grupos, el referente es el grosor de una pila de folios (una libreta o un paquete de folios), pero sorprende el grupo que indica que su referente es el grosor de un pañuelo de papel.

En el tercer conjunto (2 grupos de 16) no estiman, sino que miden. Realizan medidas directas de paquetes de folios y los dividen entre el número de folios que contiene el paquete.

Por último, dos de las respuestas no contienen información de la que se pueda extraer información, bien porque está en blanco, bien porque lo haría al azar.

Respuesta de G24:

> A pesar de ya saber el grosor de un folio si hubiéramos tenido que hacerlo con estimación seguramente hubiera sido con ojo y algo de azar.

4.2. Identificación de estrategias de estimación al estimar el grosor de un folio

En general, la precisión en la identificación de la estrategia realizada es baja. Solo 5 de los 16 grupos son capaces de expresar adecuadamente la estrategia usada (ya sea interiorización de unidades básicas de medida o conocimiento de referentes). El resto de los grupos:

- Confunden las estrategias, especialmente el conocimiento de referentes se usa cuando se debería identificar interiorización de unidades básicas. Por ejemplo, G25 dicen:

  Para estimar el grosor del folio utilizamos la referencia del grosor que tienen las hojas de una libreta y comparándolas intuimos el grosor.

  Así, mencionan la referencia del paquete de folios, cuando lo que realmente están usando es la interiorización de 1 mm.

- Usan el término *estimar* o *aproximar* como comodín para expresar comparaciones o cualquier otra estrategia. Por ejemplo, G24 señalan que:

  Como recordamos más o menos cómo es un milímetro gracias a haber utilizado tantas veces la regla, decidimos estimar en torno a esa medida.

- No indican estrategia, aunque *de facto* sí que hayan usado alguna en la estimación. Por ejemplo, G22 dice:

  Miramos el folio a la altura de los ojos.

4.3. Estimación de la masa de una silla: procedimiento seguido

En esta tarea se solicita que se estime la masa (aunque en el enunciado se utiliza peso/masa) de una silla de las que hay en las aulas. La magnitud involucrada, la masa, es fundamental, por lo que no se espera que los estudiantes utilicen magnitudes auxiliares ni técnicas indirectas como cálculos. De hecho, todas las respuestas, salvo una, mencionan objetos de referencia que comparan con la masa de la silla.

Entre los referentes encontramos diversos objetos cotidianos, como «el peso de un bebé» (G11), «nuestro perro» (G31) o simplemente «algo de la vida cotidiana» (G25).

La respuesta que no usa referentes es la que corresponde al grupo G12:

> Para obtener mediante estimación el peso de la silla, un compañero la elevó a pulso y estimo cuánto podía pesar aproximadamente.

Aunque no lo indican, la estrategia es la de interiorización de medidas, ya que el estudiante que levanta la silla debe haber interiorizado la masa 1 kg.

4.4. Identificación de estrategias de estimación al estimar la masa de una silla

A pesar de la uniformidad de los procedimientos seguidos, la referencia explícita a las estrategias es variada. La comparación es la más repetida (9 de 16 grupos), si bien la realidad es que casi todos (15 de 16) la han llevado a la práctica en su procedimiento. Ocurre lo mismo con el conocimiento de referentes, que solo lo expresan tres de los grupos, a pesar de que quince de ellos lo han usado.

La interiorización de las unidades básicas de medida, en este caso el kg, es mencionada por dos grupos, pero no por el que realmente la pone en práctica.

Finalmente, llama la atención la mención de G26 a las medidas indirectas:

> Estrategia de comparación. Comparo y estimo el peso de la silla con, por ejemplo, una garrafa de agua de 5 litros que aproximadamente pesa 5 kilos. (Medida indirecta).

En ningún caso se aprecia el uso de técnicas indirectas y no parece necesario en este caso.

Como en el caso del grosor de un folio, los estudiantes confunden las estrategias, usan los términos *estimar* o *aproximar* como comodines para expresar comparaciones o cualquier otra estrategia, o simplemente no indican estrategia.

4.5. Estimación de la capacidad de la papelera: procedimiento seguido

Como magnitud fundamental, la estimación de una cantidad de capacidad no debería requerir ayuda de otras magnitudes, pero en el caso de la capacidad su relación con el volumen puede provocar que los estudiantes se ayuden de esta última para realizar la estimación.

Atendiendo a las estrategias seguidas, las respuestas son de dos tipos. En el primero, en el que hay 13 de 16 grupos, recurren al conocimiento de referentes (junto con estrategias de comparación). Casi todos los referentes son recipientes rígidos de agua de diferentes tamaños: botellas de agua de 5l, garrafas de 8l, botellas de 2l... Pero dos grupos también usan un referente no rígido, la bolsa de basura que, como sabemos, se organiza comercialmente atendiendo a su capacidad. Por ejemplo:

> La papelera llevaba una bolsa de basura grande de 40 litros. Nos dimos cuenta de que le sobraba bolsa, de modo que partiendo de que su volumen debía ser inferior a 40 litros, realizamos la estimación. (G24)

En el segundo tipo de respuestas, formado por tres grupos, utilizan la interiorización de unidades básicas de medida. Por un lado, uno de los grupos usa el referente 1 l, y la estimación la realiza por comparación:

> Para estimar la capacidad de la papelera, utilizamos la estrategia de interiorización, para este caso: 1.º cómo conocemos el volumen que ocupa un litro de agua; 2.º estimamos cuántos litros puede ocupar gracias a la interiorización de lo que ocupa 1 litro de agua.

Por otro lado, los otros dos grupos recurren al volumen (y a la longitud) para realizar la estimación. Para estos, el referente es el cm y, además de la comparación de longitudes, están obligados a utilizar las técnicas indirectas para realizar la estimación:

> Para saber el volumen de una papelera, pensamos que su forma se asemejaba a la de un cilindro, por lo que a través del dominio de la fórmula lo calculamos. Para saber el radio, no nos fuimos a ninguna

de las bases, ya que eran distintas entre sí, por lo que decidimos estimarla en la mitad de la papelera y a partir de nuestra medida que tenemos interiorizada de 5 cm calculamos nuestra estimación. (G15)

4.6. Identificación de estrategias de estimación al estimar la capacidad de una papelera

La mención específica a las estrategias es variada: cuatro grupos mencionan el uso de referentes, dos la interiorización, tres la comparación y uno el dominio de técnicas indirectas. Se aprecia claramente que hay poca precisión en la identificación de la estrategia. Es más, esta poca precisión se muestra en el uso expresiones como «a ojo» (G12, G23 y G25) o «nos imaginamos» (D32).

4.7. Estimación de la superficie de la figura. Procedimiento seguido

Dado su carácter de magnitud derivada, para la estimación de la cantidad de magnitud superficie dada por la figura, esperamos que los procedimientos requieran de uso de la magnitud auxiliar longitud y del dominio de técnicas indirectas. Los resultados muestran que, efectivamente, hay un conjunto de producciones de los grupos (6 de 16) que requieren la magnitud longitud como auxiliar acompañada del dominio de técnicas indirectas. En estos procedimientos usan referentes (p. ej.: los dedos o el ancho de una uña) para medir de manera directa las longitudes ancho y alto de un rectángulo que circunde a la figura. Posteriormente, con ayuda de la fórmula del área del rectángulo, calculan una estimación.

Otro conjunto más numeroso de producciones (7 de 16) hace uso de referentes para una estimación por comparación directa, sin necesidad de recurrir a medidas auxiliares. Estos referentes de cantidad de superficie son la superficie de la huella del pulgar, o media huella del dedo índice, la superficie de la palma de la mano, y también otros objetos como una goma de borrar o un teléfono móvil. Uno de los grupos (D33) usa el rectángulo del borde de la imagen de la figura como referencia para realizar la comparación. Otros dos grupos utilizan material manipulativo como una cuadrícula en papel transparente o 1 cm^2 de papel recortado con el que realizan una medida directa de la forma. Después usan estrategias de composición y descomposición para estimar aquellas partes que no se ajustan a los cuadrados predeterminados (figura 2). Un último grupo usa como estrategia la interiorización de 1 cm^2.

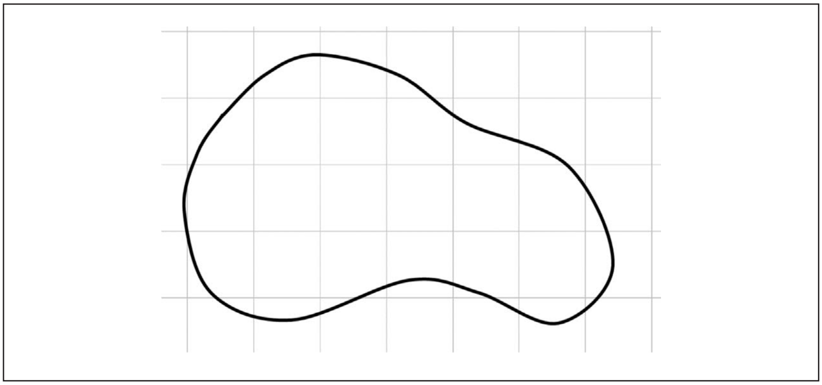


Figura 2. Cálculo de la superficie de la figura usando cuadrícula transparente.

4.8. Identificación de estrategias de estimación al estimar la de la superficie de la figura

En cuanto a las estrategias que describen explícitamente, abundan las descripciones sin ninguna estrategia (8 de 16 grupos). El resto de los grupos tampoco se caracterizan por dicha descripción, expresando solo una estrategia cada uno de ellos. Entre las que mencionan, tres grupos hablan del conocimiento de referentes, dos de estrategias de comparación, uno de interiorización de unidades y otro de composición y descomposición.

De todos, solo cuatro grupos identifican adecuadamente la estrategia que han usado en su procedimiento. Por ejemplo, el grupo D14 confunde la interiorización de las unidades de medida con el conocimiento de referentes y, aunque describen el proceso de uso de técnicas indirectas, no lo indican explícitamente:

> Para saber la superficie de la figura por estimación, hemos utilizado nuestra uña, que suponemos que es 1 cm (estrategia de interiorización). Después hemos ido poniendo la uña varias veces hasta completar la superficie de la figura A; de tal manera que hemos contado cuantas veces la hemos puesto. Una vez que sabemos cuántas uñas caben en la superficie, multiplicamos el resultado por lo que supo-

níamos que medía nuestra uña, es decir, por 1. De esta manera obtenemos nuestra estimación.

5. Conclusiones

5.1. Descripción del procedimiento de estimación

Las estrategias descritas por los estudiantes se ajustan a lo solicitado y son interpretables en términos de las estrategias de estimación. Como es de esperar, para las magnitudes fundamentales, los estudiantes estiman usando estrategias de conocimiento de referentes (especialmente para la masa y la capacidad) o de interiorización de unidades básicas (principalmente en la longitud), siempre acompañadas de estrategias de comparación. En pocas ocasiones recurren a otras estrategias para estas magnitudes fundamentales.

Cuando se trata de la magnitud área, al ser una magnitud derivada, encontramos más variedad de estrategias: algunos grupos (37,5 %) recurren a la magnitud auxiliar longitud y a referentes de longitud y a técnicas indirectas, aunque otros recurren a referentes de área o, incluso, a la interiorización de unidades de área.

Con respecto a los referentes que se usan, para la longitud utilizan referentes relacionados con el objeto a estimar (paquetes de folios) y para la capacidad referentes relacionados con objetos de uso cotidiano (recipientes para agua). Para la masa, la riqueza de referentes es mayor, ya que los estudiantes usan desde bebés hasta pesas de gimnasio, pasando por comidas (sandías o azúcar). Los referentes más llamativos son los de área, entre los que encontramos huellas, manos o teléfonos móviles.

Las unidades que mencionan como interiorizadas son usuales para la longitud (1 cm, 1 mm) y la capacidad (1 l). Para la masa solo un grupo parece que usa unidad de masa, pero no indica cuál es. En el caso del área, sorprende ver cómo los estudiantes mencionan el cm^2 como unidad interiorizada, aunque no es lo común.

5.2. Identificación de estrategias

Cuando tratan de utilizar el vocabulario específico que se les ha proporcionado, manifiestan poca precisión y se observan muchas expresiones del tipo «a ojo», «mirando»..., sobre todo en magnitudes diferentes a la longitud.

En general, existen pocas coincidencias entre las estrategias que explican y las que expresan. No parece que la magnitud que se esté estimando esté relacionada con la precisión en la identificación de las estrategias, puesto que en ninguna de las preguntas hay más de 5 grupos que relacionen correctamente el proceso y la estrategia.

Aparecen también confusiones manifiestas con las técnicas indirectas como. Por ejemplo, G34, cuando explican cómo han estimado la masa de la canica, dicen:

> Es una medida directa, ya que utilizamos las mismas magnitudes tanto para realizar el procedimiento para llegar al resultado, como para el resultado.

Este estudio exploratorio confirma que la resolución satisfactoria de tareas de estimación de medidas es compleja, y que es necesario promover el aprendizaje y el dominio de las destrezas y estrategias presentadas. Esto confirma estudios internacionales sobre estimación, y pone una llamada de atención en la formación inicial de maestros.

6. Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el seno del proyecto PROFESTEM (Competencia Profesional del Profesor en Formación Inicial y Educación STEM, PGC2018-095765-B-I00) y el proyecto PROESTEAM (Proyectos de Educación STEAM y Aprendizaje Escolar, PID2021-128261NB-I00), ambos financiados por el Programa Estatal de Generación de Conocimiento y Fortalecimiento Científico y Tecnológico del Sistema I+D+i, del Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades de España.

7. Referencias

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education* [7.ª ed]. Routledge.

Desli, D. y Giakoumi, M. (2017). Children's length estimation performance and strategies in standard and non-standard units of measurement. *International Journal for Research in Mathematics Education*, 7(3), 61-84. DOI: 10.1080/00313831.2021.1897881

Forrester, M. A. y Pike, C. D. (1998). Learning to Estimate in the Mathematics Classroom: a Conversation-Analytic Approach. *Journal for Research in Mathematics Education*, *29*(3), 334-356. DOI: 10.2307/749793

Joram, E., Gabriele, A. J., Bertheau, M., Gelman, R. y Subrahmanyam, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *36*(1), 4-23. DOI: 10.2307/30034918

Kramer, P., Bressan, P. y Grassi, M. (2018). The SNARC effect is associated with worse mathematical intelligence and poorer time estimation. *Royal Society Open Science*, *5*(8), 172362. DOI: 10.1098/rsos.172362

Ministerio de Educación, Ciencia y Deporte (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se currículo básico de la Educación Primaria. *BOE*, *52*, 1-58.

Rico, L. y Díez, A. (2011). Las matemáticas y el maestro de primaria. En: Segovia, I. y Rico, L. (eds.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 23-45). Pirámide.

Sánchez-Mendías, J., Segovia, I. y Miñán, A. (2020). Ansiedad y autoconfianza hacia las matemáticas de los futuros maestros de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *18*(51), 127-152. DOI: 10.25115/ejrep.v18i51.2981

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Síntesis.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En: Grouws, D. (ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the national council of teachers of mathematics* (pp. 371-389). NCTM.

Sunde, P. B., Petersson, J. Nosrati, M., Rosenqvist, E. y Andrews, P. (2021). Estimation in the Mathematics Curricula of Denmark, Norway and Sweden: Inadequate Conceptualisations of an Essential Competence, *Scandinavian Journal of Educational Research*. DOI: 10.1080/00313831.2021.1897881

13

Intervención didáctica en azar y probabilidad para la prevención de la ludopatía en jóvenes

Didactic intervention in chance and probability for the prevention of problem gambling among young people

Enrique Martínez-Jiménez, Rafael Bracho-López, Natividad Adamuz-Povedano y Elvira Fernández-Ahumada
Universidad de Córdoba

Resumen
El auge de los nuevos medios tecnológicos ha favorecido que la ludopatía afecte cada vez a más personas, de menor edad y con un mayor daño económico y de salud. Algunos expertos avalan la necesidad de apoyar los programas de tratamiento y prevención con propuestas educativas en general, y de educación matemática en particular, que ayuden a entender el funcionamiento de los juegos de azar a las personas afectadas o en riesgo. Partiendo de una revisión exhaustiva de la literatura sobre el tema y del diagnóstico de la situación concreta de un centro de Educación Secundaria situado en un barrio especialmente afectado por la problemática, se presenta una intervención didáctica experiencial, basada en prácticas contextualizadas relacionadas con el desarrollo de los contenidos propios del bloque de Estadística y Probabilidad. Paralelamente, se realizará una evaluación del impacto de la experiencia en la actitud de los estudiantes en relación con el fenómeno social que nos preocupa. La iniciativa se desarrolla en el marco de una convocatoria de proyectos de transferencia del conocimiento científico con fines sociales y está acompañada de otras acciones educativas, en colaboración con una asociación de jugadores en rehabilitación, asociaciones vecinales y el equipo docente del centro.

Palabras clave: adicción, juegos de azar, enseñanza de la probabilidad, transferencia del conocimiento

Abstract
The rise of new technological means has favored that gambling addiction affects more people, younger and with a greater economic and health damage. Some experts support treatment and prevention programs with educational proposals in general, and Mathematics Education in particular, that help affected or at risk people understand how gambling works. Based on an exhaustive review of the literature on the subject and the diagnosis of the specific situation of a Secondary Education center located in a neighborhood especially affected by the problem, an experiential didactic intervention is presented, based on contextualized practices related to the development of the contents of the Statistics and Probability block. In parallel, there will be an evaluation of the impact of the experience on the attitude of students in relation to the social phenomenon that concerns us. The initiative is developed within the framework of a call for projects for the transfer of scientific knowledge for social purposes and is accompanied by other educational actions, in collaboration with an association of pathological gamblers in rehabilitation, neighborhood associations and the teaching team of the Secondary School.

Keywords: addiction; gambling; probability teaching; transfer of knowledge

1. El problema de la adicción al juego

La adicción al juego, o ludopatía, es un desorden adictivo que se manifiesta como un impulso incontrolable hacia el juego y las apuestas. El *Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales, DSM 5* (American Psychiatric Association, 2013) reconoce a la ludopatía como enfermedad enmarcada dentro de los trastornos adictivos sin sustancias. Esta enfermedad está cobrando un protagonismo creciente en los últimos años por el preocupante aumento de casos y su gravedad. Se describen a continuación algunas dimensiones de este problema.

1.1. Una panorámica de la problemática del juego en jóvenes

El negocio del juego en nuestro país no deja de crecer desde su legalización en 1977. Como se muestra en la tabla 1, la cuantía de los importes dedicados al juego y los márgenes de ganancia de las empresas operadoras (el importe de la participación en el juego menos los premios satisfechos a los participantes, conocido como *Gross Gaming Revenue*, GGR) rompen récords año tras año (Chóliz y Lamas, 2017; Clotas *et al.*, 2020).

Como en todos los casos de salud pública, el bienestar social choca frontalmente con los intereses económicos de grupos minoritarios y del propio Estado a la hora de crear y ejecutar políticas de acción. A nivel internacional se muestra una tendencia general hacia la desregularización del sector a pesar de interesantes excepciones, como el caso Noruega (Clotas *et al.*, 2020).

Tabla 1. Evolución anual de los ingresos del Mercado de Juego Online de 2013 a 2018 en España. Fuente: Dirección General de Ordenación del Juego (2019).

2013	Cantidad €	523.803.573	228.640.585
	Variación anual %	0,00	0,00
2014	Cantidad €	635.572.604	252.833.598
	Variación anual %	21,34	10,58
2015	Cantidad €	838.074.382	317.118.049
	Variación anual %	31,86	25,43
2016	Cantidad €	1.167.027.545	426.155.922
	Variación anual %	39,25	34,38
2017	Cantidad €	1.640.459.297	557.348.164
	Variación anual %	40,57	30,79
2018	Cantidad €	2.518.172.023	699.335.341
	Variación anual %	53,50	25,48

La seducción de la publicidad y la omnipresencia de sus mensajes en televisión y eventos generales han tenido como resultado un descenso de la edad de las personas afectadas por la ludopatía en nuestro país. Según los datos del Informe 2015 de la Dirección General de Ordenación del Juego, el 30,4 % de los jugadores activos registrados en España se encontraba ya en el rango inferior de la muestra de 18 a 35 años (Sánchez Pardo *et al.*, 2016).

Existe una importante escasez de datos sobre la incidencia del juego en menores, evidentemente al tratarse de una práctica ilegal. No obstante, algunos estudios ofrecen datos preocupantes. A modo de ejemplo, en la provincia de Valencia, el 62,1% de los jóvenes menores de 18 años han apostado en algún juego de azar (Chóliz y Lamas, 2017), y el 6,4% de los jóvenes españoles de 14 a 18 años han apostado dinero a juegos de azar en 2018, según la encuesta sobre uso de drogas en enseñanzas secundarias ESTUDES (Observatorio Español de las Drogas y las Adicciones (OEDA), 2020). Por otro lado, Balsera (2021) y Chaparro (2021) coinciden al afirmar que resulta alarmante el cambio drástico en los últimos años del perfil del ludópata en relación con su edad. Si en la década de los noventa del pasado siglo la media de edad estaba entre los 45 y 50 años, en la actualidad esta media se sitúa entre los 20 y los 30.

Esta relación entre jóvenes y juego ha sufrido una evolución en los últimos años que ha hecho que las instituciones incorporen este problema a su agenda de trabajo regular. La Fundación española de Ayuda contra la Drogadicción (FAD) realiza campañas específicas dirigidas a jóvenes desde 2017. De uno de sus estudios (Megías Quiros, 2020) sobresalen algunos aspectos interesantes: el juego y las apuestas se han naturalizado como modelo de ocio, dejando la imagen de estigma social que le era propia anteriormente; la iniciación es grupal motivada por el deseo de integración y de imitación de referentes mediáticos como las figuras del deporte y la televisión; el motivo principal para iniciarse es la ilusión de alcanzar autonomía económica; subyace la idea de convertirse en profesional, para lo cual se sobreentiende que es necesario jugar mucho; existe una percepción positiva de los jóvenes que ganan dinero, ya que se les suponen grandes habilidades y conocimientos del juego; existen diferencias de género notables, el jugador de éxito es masculino mientras que las jóvenes jugadoras aún son vistas de forma negativa.

1.2. La nueva dimensión del problema: el juego en línea

La madurez de la *sociedad de la información* ha supuesto la universalización de las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) y el auge de la industria del ocio y los videojuegos, con influencia desde la infancia a la edad adulta. Un campo de cultivo perfecto para la explosión del mercado del juego en línea que fascina por su ubicuidad, el uso de mecanismos psicológicos adictivos en su diseño y la práctica ausencia de control de acceso, o facilidad para ser burlado.

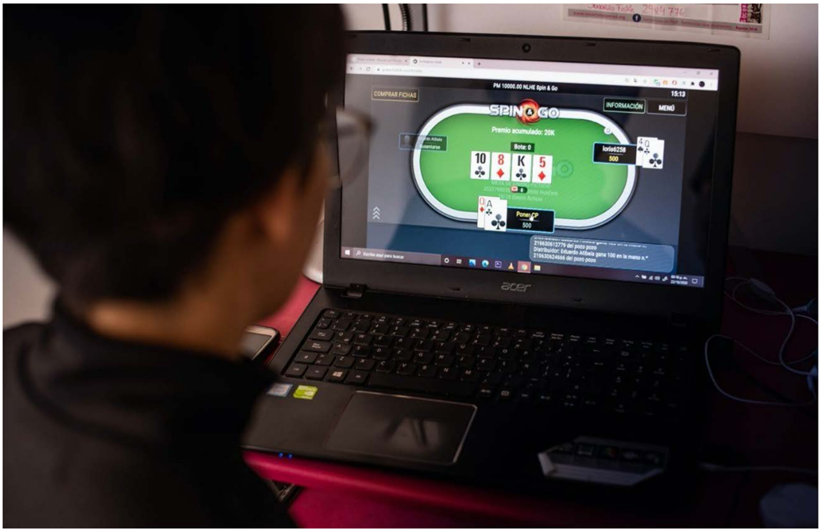


Figura 1. El juego en línea supone un reto cuyas consecuencias más graves aún son desconocidas siendo los menores y jóvenes los colectivos de mayor riesgo. Fuente: https://www.rionegro.com.ar/ludopatia-online-la-ruleta-que-no-para-en-cuarentena-1546696.

Esta creciente y variada oferta repercute en la relación entre jóvenes y menores con el juego, dando lugar a una serie de características diferenciales respecto a las modalidades de juego tradicional (Lamas Alonso *et al.*, 2018; Megías Quiros, 2020): el juego en línea aumenta el hábito y dificulta el autocontrol al mismo tiempo que invisibiliza el problema frente a terceras personas hasta que los síntomas son extremadamente graves; el número de enfermos está aumentando exponencialmente y la edad de los mismos es cada vez menor; por último, la progresión hacia la adicción es mucho más rápida, en ocasiones bastan unos pocos meses desde la primera exposición frente a los cinco o seis años que se observaban en el juego presencial.

Aún se desconocen las repercusiones del estado de alarma sanitaria provocado por la covid-19 desde inicios del 2020, a pesar de que las ganancias y la apertura de nuevos locales de juego tradicionales se han reducido notablemente, todo parece indicar que en los próximos años la problemática se agudizará en número de personas afectadas, especialmente jóvenes y menores, y en daños causados a estos y a sus familias. Se vislumbra un problema social de carácter pandémico.

2. Matemáticas y ludopatía, relaciones y oportunidades

Abordar la situación planteada pasa, en primer lugar, por legislar una regularización del sector para combatir el alto nivel de exposición al juego y el acceso de menores o personas en riesgo. El establecimiento de políticas adecuadas ha demostrado ser la intervención más efectiva en la prevención de la adicción al juego (Williams *et al.*, 2012), pero no son las únicas.

A una legislación eficaz deben sumarse intervenciones de carácter educativo que ayuden a cambiar actitudes y creencias asociadas al juego, desarrollar habilidades preventivas y adquirir conocimientos para reconocer los problemas derivados del juego y las apuestas.

2.1. Mitos asociados a los juegos de azar

Existen una serie de falsas creencias o mitos relacionados con el azar comunes a gran parte de los jugadores, independientemente de que presenten o no problemas de adicción. Se presenta a continuación un listado de los mitos más comunes y de los conceptos matemáticos a los que refieren, extraído de Sánchez Pardo *et al.* (2016) y adaptado a las categorías de Hahmann (2016) y Williams *et al.* (2012):

- Mitos relacionados con la percepción errónea del juego en general.

  El juego es una forma fácil de hacer dinero.

  La base del negocio de las casas de apuestas es que siempre existen más probabilidades de perder que de ganar. Una aplicación del cálculo de probabilidades a cada juego concreto permite reconocer esta realidad.

- Mitos relacionados con una autopercepción errónea de las habilidades propias.

  Dispongo de un método de juego que me ayuda a ganar.
  Apostando con un patrón determinado hay más posibilidades de ganar.

  La aleatoriedad está siempre presente en los juegos de azar. No hay patrones de comportamiento que puedan influir en el resultado del juego.

- Mitos relacionados con supersticiones y el control de la suerte.

  Mi número de la suerte aumenta mis posibilidades de ganar.

  Si existe equiprobabilidad de sucesos, todos los números tienen igual probabilidad de resultar agraciados.

- Mitos relacionados con atribuciones erróneas o falsas interpretaciones.

  Algunas personas tienen más suerte que otras.
  Tengo la sensación de que hoy es mi día de suerte.

  La aleatoriedad de los juegos de azar implica que todas las personas tienen las mismas oportunidades de ganar o perder. Si en el juego se da independencia de sucesos, no existe correlación entre unas jugadas y otras, por lo cual no hay rachas buenas o malas, a pesar de que nuestro cerebro se empeñe en crear conexiones.

- Mitos relacionados con correlación ilusoria y karma.

  Si una máquina de juego lleva tiempo sin pagar un premio, es que un premio grande está próximo a salir.
  Si seguimos jugando, nuestra suerte cambiará y podremos recuperar el dinero perdido.

  Al igual que antes, si las jugadas son independientes unas de otras, la probabilidad de ganar es la misma en la primera jugada que en la número 100. El hecho de que un resultado lleve mucho tiempo sin salir no quiere decir que tenga que salir en las siguientes jugadas. Normalmente, los jugadores incrementan sus pérdidas, porque siguen jugando con la creencia de que en algún momento cambiará la tendencia. Las pérdidas serán mayores cuanto más se juegue.

Si estos son los mitos que la publicidad y los medios de comunicación se encargan de fortalecer, sería obvio que el conocimiento de los principios de la probabilidad y la estadística y la aplicación de la lógica matemática serían suficientes para invalidarlos y prevenir cualquier tipo de problema con el juego. Veamos qué dicen las investigaciones en este campo.

2.2. El papel de la educación matemática en los problemas con el juego

Existe una estrecha conexión entre matemáticas y juego, ya que cualquier juego se basa en un modelo matemático que lo configura. Cualquier juego de azar o apuesta ha sido ideada y validada matemáticamente antes de hacerse pública en busca de optimizar los beneficios de la empresa operadora. Partiendo de esta idea, Cătălin Bărboianu (2019) afirma que no se puede tratar a un jugador separando del análisis matemático del juego con el que tiene problemas.

Sin embargo, la relación entre el conocimiento matemático y la posibilidad de desarrollar relaciones problemáticas con el juego parece no estar clara. Según Shaffer *et al.* (1995), los jóvenes con conocimiento básicos sobre probabilidad y azar desarrollaban hábitos de juego más responsables que los que no los poseían. Asimismo, se ha detectado que jugadores con problemas de adicción poseen una comprensión más limitada de la naturaleza del azar si se les compara con jugadores habituales no problemáticos (Turner, 2000). Con todo, otras investigaciones sugieren que en el momento de jugar los participantes sostienen las mismas percepciones y cometen los mismos errores independientemente de su conocimiento previo sobre estadística y probabilidad (Lambos y Delfabbro, 2007; Pelletier y Ladouceur, 2007). Esto significa que los jugadores suelen desactivar su pensamiento racional cuando están inmersos en el proceso de juego, prestando atención solo a cierto tipo de información en función de los intereses personales y la experiencia de cada uno.

Estos resultados indican que el conocimiento de los principios de la probabilidad y la estadística no es determinante una vez que se ha establecido una relación patológica con el juego. Por esa misma razón, es necesario incorporar la educación matemática en una fase inicial de prevención que favorezca una primera aproximación al juego con menor riesgo. En este sentido, varios autores (Keen *et al.*, 2017; Turner, 2000; Williams *et al.*, 2012) avalan la necesidad de incorporar desde edades tempranas el aprendizaje de contenidos matemáticos básicos que permitan desarrollar posteriormente conceptos como el de *probabilidad* de un suceso de juego.

Williams *et al.* (2012) incorporan la dimensión psicológica recomendando programas educativos preventivos que desarrollen competencias en dos ámbitos: la capacidad de analizar la probabilidad real de ganar en un juego de azar, aprendizaje de los principios matemáticos del juego, y la detección de aspectos perceptivos que están presentes en los juegos y que contribuyen a desinformar al jugador. En la misma línea se sitúa la propuesta curricular de Turner *et al.* (2008), que incorpora al conocimiento matemático, conciencia sobre la problemática social del juego, el desarrollo de habilidades de control y de gestión emocional.

Por otro lado, Keen *et al.* (2017) también advierten de que el análisis de experiencias educativas de este tipo ha demostrado que no todo curso general de probabilidad y estadística matemática es capaz de lograr resultados significativos y duraderos en programas de intervención con jugadores patológicos. Entre sus recomendaciones señalan que deben programarse iniciativas destinadas a público general, no al que ya tiene problemas, y a una edad tan temprana como sea posible y que se utilicen contenidos y plataformas relevantes para los participantes, jóvenes y niños, medios tecnológicos y ejemplos extraídos de su experiencia de juego previa o futura.

Basándose en este marco de investigación se describe, a continuación, la propuesta didáctica de carácter preventivo destinada a jóvenes «Aprende Matemáticas para Jugar con Cabeza», una intervención didáctica experiencial, basada en prácticas contextualizadas relacionadas con el desarrollo de los contenidos propios del bloque de Estadística y Probabilidad con el objetivo de combatir algunos de los mitos asociados al juego.

3. Una propuesta de intervención: «Aprende matemáticas para jugar con cabeza»

En un mundo globalizado e interconectado como el actual la sociedad del conocimiento ha adquirido una relevancia indiscutible desde sus componentes científica y tecnológica, convirtiéndose en un elemento fundamental para el desarrollo de las sociedades en sus dimensiones social, económica y personal. Por ello, la apuesta por el desarrollo del conocimiento se ha convertido en un pilar esencial que contribuirá a conseguir los niveles a los que se aspira en la prosperidad empresarial y laboral, el desarrollo sostenible de las economías emergentes y la mejora de nuestra sociedad en su conjunto, en particular de los sectores más necesitados (Ordóñez, 2002). En este marco, autores como Nowotny *et al.* (2001) y Arias Pérez *et al.* (2011) plantean que las universidades como instituciones creadas en los tiempos modernos para liderar la producción de nuevo conocimiento están llamadas a integrar sus funciones científicas y sociales, a contextualizar la ciencia, a superar las anacrónicas divisiones entre las disciplinas, a articular la investigación con la docencia y sobre todo a abrirse hacia la sociedad de forma completa e integrada, dado que lo «interno» y lo «externo» son distinciones que en forma paulatina van perdiendo su sentido por causa de las vinculaciones con el Estado, la industria y la sociedad en general.

La experiencia surge de la responsabilidad institucional de parte del profesorado de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Córdoba ante la problemática actual del juego en la ciudad y, en particular, ante la vulnerabilidad de la población juvenil de los barrios menos favorecidos. El proyecto fue subvencionado en la convocatoria UCO Social Innova de la Universidad de Córdoba para iniciativas de transferencia del conocimiento científico con fines sociales.

3.1. El Distrito Sur de Córdoba, un contexto sensible

El Distrito Sur es una amplia zona de la ciudad de Córdoba, en la que podemos distinguir cuatro barrios: Polígono Guadalquivir, Sector Sur, Fray Albino y Campo de la Verdad-Miraflores. Si bien existen diferencias considerables entre unos barrios y otros, e incluso entre zonas concretas dentro de cada uno de estos barrios, en términos generales el nivel socioeconómico de la población de este distrito es medio bajo y, concretamente, la parte alta del Sector Sur y gran parte del Polígono Guadalquivir podría considerarse de exclusión social (IESA, 2011). Ante esta realidad que hizo que el Instituto de Secundaria en el que se desarrolla este proyecto fuese declarado Centro de Actuación Educativa Preferente en 1993 y a pesar de que algunas de las teorías de la reproducción de Bordieu y Bernstein, tan de moda en la Sociología de la Educación en décadas recientes, aún mantienen cierto eco en nuestra sociedad (Ávila, 2005), el profesorado que suscribe este proyecto, convencido de que la igualdad educativa sí es posible desde la responsabilidad del profesorado y de las administraciones educativas y mediante actuaciones adecuadas, plantea la experiencia que se presenta con el objetivo de abordar una problemática que lamentablemente está teniendo un impacto singular en las capas sociales más desfavorecidas, como es la adicción a los juegos de azar, desde la educación matemática.

Los preocupantes datos que se recogen en el primer apartado de este capítulo, entre otros, son un reflejo de un problema que aumenta de la mano de la proliferación de salas de juego y casas de apuestas, que se instalan en una gran proporción en barrios con un bajo nivel socioeconómico. Es el caso del Distrito Sur en la capital cordobesa, el tercer barrio con renta más baja de España que, sin embargo, cuenta con cuatro salas de juego, un hecho nada casual que refleja el impacto de la problemática en los sectores más desfavorecidos y que se une a la alarmantemente creciente problemática de dependencia de los juegos en línea. Según la Federación Española de Jugadores de Azar Rehabilitados (Lamas Alonso *et al.*, 2018), el 40 % de las personas atendidas son adictas a los juegos a través de Internet.

Por todo ello, en Córdoba, una ciudad con una marcada tradición asociacionista, se ha gestado en los últimos meses un movimiento ciudadano liderado por asociaciones vecinales, la plataforma «STOP Casas de Apuestas» y la Asociación Cordobesa de Jugadores en rehabilitación (ACOJER), con el objetivo de afrontar esta problemática, una iniciativa que ha sensibilizado a los representantes políticos en el Ayuntamiento, quienes han aprobado una moción para trabajar sobre el tema. También desde la responsabilidad social a la que aludíamos en el apartado anterior, la Universidad de Córdoba se plantea sumar iniciativas educativas de la mano del proyecto que se presenta, contando con dos socios colaboradores de excelencia: un Instituto de Secundaria, que, sin duda, es un referente social y cultural en el denominado Distrito Sur de la ciudad, y ACOJER.

3.2. Desarrollo de la propuesta didáctica

Los destinatarios directos son el alumnado del Distrito Sur de la ciudad, representados por el alumnado de 1.º, 2.º y el de la asignatura de Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas de 4.º de Educación Secundaria Obligatoria, junto con los estudiantes de la asignatura optativa específica de 1.º de Bachillerato Estadística y Probabilidad Aplicada a la Vida Cotidiana de un instituto del barrio. Participarán en la experiencia siete profesores de la Universidad de Córdoba, cinco del Departamento de Matemáticas del instituto, el responsable del Equipo de Orientación y la Asociación ACOJER. También colaboran puntualmente el Equipo de Orientación Educativa de la zona, las asociaciones vecinales del barrio y la plataforma «STOP casas de apuestas».

El proyecto se orienta hacia tres acciones fundamentales: la exploratoria e investigativa, la intervención didáctica en las aulas y la de divulgación local.

El estado de la cuestión comienza a configurarse con la ayuda de los datos que inicialmente nos proporciona ACOJER y se completa con las reuniones que mantenemos con el Equipo de Orientación del centro educativo. A partir de estas informaciones realizamos una propuesta de investigación, explicada en detalle en el apartado siguiente, que nos ayudará a configurar el mapa de la problemática actual de la adicción al juego entre el alumnado del centro y los resultados de la intervención.

La intervención educativa estará dirigida por el equipo docente, si bien se basará en el conocimiento y en los intereses de los destinatarios y estará diseñada por el propio alumnado de 4.º de la ESO y de Bachillerato. Desde las asignaturas Matemáticas Orientadas a las Enseñanzas Académicas y Estadística y Probabilidad Aplicada a la Vida Cotidiana, el alumnado recibe formación sobre combinatoria, regla de Laplace, sucesos dependientes e independientes, uso de tablas de contingencia y esquemas de árbol para la asignación de probabilidades y nociones sobre la influencia de la visualización en la percepción de probabilidades pequeñas. El enfoque de la formación es de carácter lúdico y se enfoca al diseño de sus propios juegos de azar de los estudiantes a lo largo del primer trimestre del curso académico. El alumnado calculará las probabilidades presentes en su juego y tomará decisiones sobre diseño, materiales, duración de la partida, costes de participación y premios a entregar de manera que sus juegos resulten atractivos en un taller final que asemejará un salón de juegos. Dicho taller estará destinado al alumnado de 1.º de la ESO y será conducido por el propio alumnado de 4.º de Eso y Bachillerato bajo la supervisión del profesorado participante. A estos alumnos de cursos inferiores se les asigna una cantidad monetaria de curso no legal para que actúen como jugadores del salón. Tras jugar 50 partidas rápidas, el juego se clausura y los alumnos comprueban las ganancias obtenidas con el cálculo teórico realizado por ellos previamente. Comprobando, con sorpresa en muchos casos, la gran proximidad a la «ganancia real» obtenida.

Para terminar, se organizará una jornada en torno a la problemática de la adicción a los juegos de azar con un planteamiento basado en la información divulgativa, la reflexión y el debate, que contará con la colaboración y participación de todos los agentes externos implicados en la experiencia.

3.3. Diseño de la investigación

Los resultados de la participación en el taller de educación matemática aplicada a juegos de azar en las creencias asociadas al juego de estudiantes de este Instituto de Enseñanza Secundaria se estudian de forma exploratoria persiguiendo dos objetivos de investigación:

- Diagnosticar perfiles de riesgo en la relación con los juegos de azar en el alumnado de todo el centro educativo.
- Explorar el efecto de la participación en el taller de educación matemática aplicada a juegos de azar en las creencias asociadas a los juegos de azar.

Se trata de una investigación cuasiexperimental con un tipo de diseño pre-post que desarrollará una metodología mixta combinando una fase cuantitativa y otra cualitativa.

La fase cuantitativa se compone de dos etapas. La primera se basa en la evaluación general del riesgo de juego patológico en los estudiantes del centro educativo mediante el cuestionario *CAGI - Inventario Canadiense de Juego para Adolescentes*, V 1.09, mayo 2010 (Tremblay *et al.*, 2010). El cuestionario consta de dos partes: en la primera (20 ítems) se analizan distintos juegos o tipos de apuesta, la frecuencia de juego y el tiempo empleado; en la segunda parte hay 24 ítems relativos a las consecuencias apostar agrupadas en cinco ámbitos: consecuencias psicológicas, consecuencias sociales, consecuencias financieras, pérdida de control y gravedad global de los problemas del juego. El análisis de las respuestas de esta segunda parte establece tres perfiles de gravedad del problema de ludopatía (*GPSS*: *Gambling Problem Severity Subscale*): luz verde implica que no hay problemas; luz amarilla, gravedad baja o moderada; y luz roja, gravedad alta.

La segunda etapa, evaluará la eficacia de la participación en el taller sobre las creencias erróneas asociadas al juego, utilizando el instrumento *GBQ - Gamblers' Beliefs Questionnaire* (Steenbergh *et al.*, 2002). Se trata de un cuestionario de 20 ítems divididos en dos categorías, ilusión de control (8 ítems) y suerte/perseverancia (12 ítems). Las puntuaciones altas implican un mayor nivel de distorsión cognitiva, y, por tanto, mayor tendencia al juego.

La fase cualitativa consistirá en entrevistas semiestructuradas individuales a una selección de alumnado del centro de los distintos perfiles detectados en la fase cuantitativa y en entrevista grupal abierta (*focus group*) con los participantes en el taller. El objetivo será explorar con mayor detalle las percepciones de los jóvenes sobre la relación entre Matemáticas y juego.

Se recogerán datos en varias etapas. Una primera muestra antes de la realización del taller en la que se administrará a todo el centro el cuestionario *CAGI* y a los participantes en el taller el cuestionario *GBQ-S* (pretest). Una segunda muestra, un mes después de haber realizado el taller, en la que el alumnado participante en el taller realizará nuevamente el cuestionario *GBQ-S* (postest). En una tercera etapa, se realizarán las entrevistas en profundidad a alumnado de distintos perfiles (sin problemas de juego, con problemas moderados y con problemas graves, además de haber participado o no en el taller).

4. Resultados esperados y conclusiones del trabajo

El problema de la adicción a los juegos de azar en jóvenes y menores se incrementa cada año en nuestro país, al igual que en otros países desarrollados. A pesar de que ciertos juegos presenciales siguen siendo populares, el crecimiento del mercado de los juegos en línea debe seguirse con preocupación por los mayores efectos dañinos que estos juegos tienen en las personas con problemas de adicción.

Un aspecto común a los jugadores es la creencia de ciertos mitos asociados al juego. La detección, análisis y vigilancia de estas falacias es un punto clave en cualquier proceso de autorregulación relacionado con la decisión personal de jugar.

La educación matemática, en los bloques de probabilidad y estadística, es un complemento necesario de cualquier intervención educativa destinada a la prevención o intervención psicológica de tratamiento de la adicción al juego, ya que la matemática es la base de cualquier juego de azar.

En este trabajo se ha planteado una propuesta de intervención preventiva, basada en un curso-taller donde se abordan algunos de los mitos del juego conectándolos con los contenidos matemáticos que los alumnos han trabajado a partir de actividades manipulativas, de representación y cálculo relacionadas a situaciones y juegos cercanos a los jóvenes y menores.

Se ha planteado igualmente la investigación que se llevará a cabo para: explorar los niveles de riesgo en un centro educativo de Educación Secundaria de un barrio periférico de Córdoba especialmente afectado por el problema de la ludopatía; y analizar el efecto de la participación en el taller sobre las falsas creencias asociadas al juego.

Se espera que la propuesta determine la idoneidad del curso propuesto para invalidar algunas de las falsas creencias asociadas al juego. Y, en segundo lugar, el nivel de mejora en distintos perfiles de jóvenes: con problemas de adicción, en situación de riesgo y sin problemas ni riesgo.

5. Referencias

American Psychiatric Association (2013). *Manual Diagnóstico y Estadístico de los Trastornos Mentales, DSM-5*. Editorial Médica Panamericana.

Arias Pérez, J. y Aristizábal Botero, C. (2011). Transferencia de conocimiento orientada a la innovación social en la relación ciencia-tecnología y sociedad. *Pensamiento & Gestión*, *31*, 137-166.

Ávila, M. (2005). Socialización, educación y reproducción cultural: Bordieu y Bernstein. *Revista interuniversitaria de Fórmación del profesorado*, *19*(1), 159-174.

Balsera, A. (15 de enero de 2021). Los grupos de la oposición se unen para mostrar su rechazo a las casas de apuestas en Córdoba. *El Día de Córdoba*. https://www.eldiadecordoba.es/cordoba/oposicion-mocion-casas-apuestas-Cordoba_0_1539146205.html

Chaparro, L. (18 de enero de 2021). Stop Casas de Apuestas exige al Ayuntamiento de Córdoba que cumpla las medidas aprobadas contra las salas de juego. *El Día de Córdoba*. https://www.eldiadecordoba.es/cordoba/oposicion-mocion-casas-apuestas-Cordoba_0_1539146205.html

Chóliz, M. y Lamas, J. (2017). «¡Hagan juego, menores!» Frecuencia de juego en menores de edad y su relación con indicadores de adicción al juego. *Revista Española de Drogodependendencias*, *42*(1), 34-47.

Clotas, C., Bartroli, M., Caballé, M., Pasarín, M. I. y Villalbí, J. R. (2020). El negocio de los juegos de azar: una perspectiva desde la salud pública. *Revista Espanola de Salud Publica*, *94*, 1-10.

Dirección General de Ordenación del Juego (2019). *Memoria Anual del Juego de 2018*. https://www.ordenacionjuego.es/es/mercado-juego-online-estatal

Hahmann, T. E. (2016). Moderate-risk and problem slot machine gamblers: A typology of gambling-related cognitions. *Journal of Gambling Issues*, *34*, 140-155. https://doi.org/10.4309/jgi.2016.34.8

IESA (2011). *Diagnóstico sobre condiciones de vida de la población en Córdoba. Perfiles y grupos en situación de vulnerabilidad.* Ayuntamiento de Córdoba-IESA. https://ssm.cordoba.es/images/pdf/diagsoc/Diagsoc_Perfiles_y_grupos_en_situacion_de_vulnerabilidad.pdf

Keen, B., Blaszczynski, A. y Anjoul, F. (2017). Systematic Review of Empirically Evaluated School-Based Gambling Education Programs. *Journal of Gambling Studies*, *33*(1), 301-325. https://doi.org/10.1007/s10899-016-9641-7

Lamas Alonso, J. J., Santolaria Gómez, R., Estévez Gutiérrez, A. y Jáuregui Bilbao, P. (2018). *Guías Clínicas Específicas: Jovenes y juego online*. Federación Española de Jugadores de Azar Rehabilitados.

Lambos, C. y Delfabbro, P. (2007). Numerical Reasoning Ability and Irrational Beliefs in Problem Gambling. *International Gambling Studies*, *7*(2), 157-171. https://doi.org/10.1080/14459790701387428

Megías Quiros, I. (2020). *Jóvenes, juegos de azar y apuestas. Una aproximación cualitativa*. Centro Reina Sofía sobre Adolescencia y Juventud - Fundación Ayuda contra la Drogadicción. https://doi.org/10.5281/zenodo.3601078

Nowotny, H., Scott, P. y Gibbons, M. (2001). *Re-thinking science, knowledge and the public in an Age of Uncertainty*. Polity Press.

Observatorio Español de las Drogas y las Adicciones (OEDA) (2020). *Informe 2018/2019 Encuesta sobre uso de drogas en enseñanzas secundarias en España (ESTUDES) 1994-2018*.

Ordóñez, G. (2002). La experiencia colombiana en la puesta en marcha del Observatorio de Ciencia y Tecnología - OCyT. *Cuadernos Del Cendes*, *19*(51), 83-108.

Pelletier, M. F. y Ladouceur, R. (2007). The effect of knowledge of mathematics on gambling behaviours and erroneous perceptions. *International Journal of Psychology*, *42*(2), 134-140. https://doi.org/10.1080/00207590600788047

Sánchez Pardo, L., Herrador Bueno, E., Aleixandre Benavent, R., Bueno Cañigral, F. J., Bueno, E. H. y Benavent, R. A. (2016). *Guía para la Prevención de la Adicción al Juego y las Apuestas Online*. UPCCA - Concejalía de Sanidad, Salud y Deportes Ayuntamiento de Valencia.

Shaffer, H. J., Walsh, J. S., Howard, C. M., Hall, M. N., Wellington, C. A. y Vander Bilt, J. (1995). *Science and substance abuse education: A needs assessment for curriculum design.* Division on Addictions, Harvard Medical School, Boston.

Steenbergh, T. A., Meyers, A. W., May, R. K. y Whelan, J. P. (2002). Development and validation of the Gamblers' Beliefs Questionnaire. *Psychology of Addictive Behaviors*, *16*(2), 143-149. https://doi.org/10.1037/0893-164X.16.2.143

Tremblay, J., Stinchfield, R., Wiebe, J. y Wynne, H. (2010). *Canadian Adolescent Gambling Inventory (CAGI) Phase III Final Report*. Canadian Centre on Substance Abuse.

Turner, N. (2000). Randomness, Does It Matter ? *The Electronic Journal of Gambling Issues*, *2*, 1-8. http://www.camh.net/egambling/issue2/research

Turner, N. E., Macdonald, J. y Somerset, M. (2008). Life skills, mathematical reasoning and critical thinking: A curriculum for the prevention of problem gambling. *Journal of Gambling Studies*, *24*(3), 367-380. https://doi.org/10.1007/s10899-007-9085-1

Williams, R. J., West, B. L. y Simpson, R. I. (2012). Prevention of Problem Gambling : A Comprehensive Review of the Evidence and Identified Best Practices. En: *Report prepared for the Ontario Problem Gambling Research Centre and the Ontario Ministry of Health and Long Term Care*. hdl.handle.net/10133/3121

14

Presencia de diferentes formas de estimación en el currículo de Educación Primaria

Presence of different forms of estimation in the primary education curriculum

Marta Molina, Carmen López-Esteban y Laura Delgado-Martín
Universidad de Salamanca

Resumen
La estimación es una componente clave de la competencia matemática y una habilidad fundamental para la vida cotidiana. Adoptamos una amplia concepción de este término que incluye cinco formas de estimación. Tres de ellas han sido consideradas tradicionalmente en la literatura: la estimación en cálculo, la estimación de cantidades (o de magnitudes discretas) y la estimación en la medida (o de magnitudes continuas). La estimación en la recta numérica es referida recientemente en la literatura como una forma de estimación que actúa de predictor del rendimiento en matemáticas a lo largo de la educación obligatoria y de posteriores dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. Además, reconocemos una quinta acepción relativa a contextos probabilísticos. Desde este enfoque múltiple, realizamos un análisis de la presencia de la estimación en el currículo de Educación Primaria español.

Palabras clave: cálculo, currículo, Educación Primaria, estimación, medida

Abstract
Estimation is a key component of mathematical competence and a fundamental ability in daily life. We adopt a wide conception of this term that includes five forms of estimation. Three of them have traditionally been considered in the literature: computational, quantity (or discrete magnitudes) and (or continuous magnitudes) measurement estimation. Number line estimation has recently been referred in the literature as a form of estimation that acts as a predictor of mathematics performance along secondary education and of lat-

ter difficulties in mathematics learning. In addition, we acknowledge a fifth form related to probabilistic contexts. From this multiple approach, we analyse the presence of estimation in the Spanish primary education curricula.

Keywords: computation, curricula, estimation, measurement, primary education

1. Introducción

Diversos programas internacionales han enfatizado el papel de la estimación en la enseñanza de las matemáticas. Entre ellos, los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000). Este documento describe variedad de experiencias que los educadores de matemáticas en todos los niveles deben buscar desarrollar en sus estudiantes. Estas prácticas, que se basan en «procesos y competencias» como la resolución de problemas, el razonamiento y la prueba, la comunicación, la representación y las conexiones, indican que el estudiante debe detectar posibles errores mediante el uso estratégico de la estimación.

En el caso del currículo español de Educación Primaria, la estimación aparece por primera vez de forma explícita en 1991 (Segovia y Castro, 2009): «Las matemáticas constituyen hoy un conjunto amplio de modelos y procedimientos de análisis, de cálculo, medida y estimación» (MEC, 1991, p. 31). Según De Castro *et al.* (2014), a partir del *Yearbook* de 1986 editado por la NCTM y dedicado a la estimación, la presencia y relevancia de la estimación en los currículos de matemáticas son crecientes.

Nuestro interés es indagar en formas de abordar la estimación en las aulas de Educación Primaria y en la formación de docentes de dicha etapa. Como primer paso, en este capítulo analizamos las diferencias existentes entre el tratamiento de la estimación en los actuales currículos de Educación Primaria de tres comunidades autónomas españolas: Madrid, Castilla y León y Andalucía, fruto del desarrollo curricular de la LOMCE, y del Real Decreto 126/2014. Este análisis nos permite conocer al menos en su fundamentación legal, el tratamiento e importancia que se le da en el currículo de matemáticas a las acciones directas o vinculadas con la estimación.

2. Formas de estimar

En la literatura de educación matemática la *estimación* se define como:

> [...] un juicio de valor del resultado de una operación numérica o de la medida de una cantidad, en función de circunstancias individuales del que lo emite. (Segovia *et al.*, 1989, p. 18)

Es un juicio que se realiza con rapidez, frecuentemente en la mente, usando números tan sencillos como sea posible y que conduce a un valor que no es exacto, pero es adecuado para tomar decisiones y está basado en alguna información, referencia o experiencia del sujeto sobre la situación que debe enjuiciar (Reys, 1984; Segovia *et al.*, 1989). En consecuencia, el valor asignado es aproximado y admite distintas aproximaciones dependiendo de quien realice la valoración.

En esta definición se reconocen las tres formas de estimar que tradicionalmente se han considerado en la literatura: la estimación en el cálculo, la estimación de cantidades (numerosidad o estimación de magnitudes discretas) y la estimación en la medida (o estimación de magnitudes continuas) (Sowder, 1992).

Las dos primeras formas de estimar citadas son las de mayor aplicabilidad en la vida cotidiana. La estimación computacional consiste en encontrar una respuesta aproximada a problemas aritméticos sin calcular la respuesta exacta. De utilidad en situaciones cotidianas en las que una respuesta aproximada proporciona un grado de precisión adecuado al contexto, es considerada parte fundamental del sentido numérico (Sowder, 1988). Proporciona información sobre la comprensión general de las matemáticas de conceptos, relaciones y estrategias, y sobre el desarrollo cognitivo de los niños en el dominio de las matemáticas (Sowder, 1988, 1992; Sowder y Wheeler, 1989).

La estimación de la medida de cantidades de magnitudes continuas consiste en determinar medidas sin ayuda de instrumentos, haciendo uso de referentes que previamente se han interiorizado. Este tipo de estimación es una estrategia de gran interés en la vida cotidiana, muy habitual en contextos profesionales y ligada con la adquisición de contenido matemático (Joram *et al.*, 2005). Por otra parte, la estimación de cantidades, una habilidad recíprocamente dependiente de la habilidad de contar (Barth *et al.*, 2016) y predictora de la posterior competencia aritmética (Bartelet, 2014), refiere a la habilidad de cuantificar de forma aproximada el cardinal de un conjunto de elementos sin necesidad de contarlos.

Recientemente, en la literatura se ha identificado una cuarta forma de estimar: la estimación en la recta numérica (Sayer *et al.*, 2020). Esta refiere a asignar a un número dado una posición espacial en una recta numérica en la que viene representado un valor en cada extremo o, en menores casos, a asignar un número a una posición espacial dada en una recta numérica con valores en cada extremo (Siegler *et al.*, 2009). Este tipo de estimación ha sido considerada principalmente por psicólogos al indagar en el desarrollo del pensamiento matemático y la identificación de dificultades de aprendizaje (Sayer *et al.*, 2020). Se destaca su importancia como fuerte predictor de posteriores dificultades en el aprendizaje de las matemáticas (Andersson y Östergren, 2012) y del rendimiento en matemáticas a lo largo de la educación obligatoria (Simms *et al.*, 2016).

En este trabajo distinguimos un uso adicional del término *estimación* en contextos probabilísticos para denominar la asignación subjetiva de la probabilidad de ocurrencia de un suceso de un fenómeno probabilístico a partir del conocimiento y experiencia previa del sujeto. En estos casos se da una estimación de tipo cualitativo de la probabilidad de ocurrencia de un suceso empleando términos tales como *posible*, *imposible*, *seguro*, *poco posible/probable*, *muy posible/probable*. No obstante, también pueden asignarse probabilidades a sucesos haciendo corresponder un valor numérico entre 0 y 1 o situar los sucesos sobre un gráfico, mostrando la escala de la probabilidad. En la literatura sobre estimación no hemos encontrado mención de este término. Sí aparece en trabajos relativos a la introducción a la probabilidad como contenido del currículo de Educación Primaria (p. ej.: Gómez-Torres *et al.*, 2014) y también en el currículo, como veremos más adelante, al proponerse una iniciación intuitiva al cálculo de probabilidades de un suceso.

3. Metodología

Empleamos el análisis documental como herramienta de obtención de información cualitativa. Para la realización de este análisis comparativo de normativas curriculares tomamos como referencia el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria (*BOE* de 1 de marzo de 2014) y el currículo de tres comunidades autónomas: Madrid, Castilla-León y Andalucía, que lo han desarrollado mediante los Decretos: Decreto 89/2014, de 24 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el currículo de la Educación Primaria (*BOCM* de 25 de julio de 2014), Decreto 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la comunidad de Castilla y León (*BOCyL* de 25 de julio de 2016) y Decreto 97/2015, de 3 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria en la comunidad autónoma de Andalucía (*BOJA* de 13 de marzo de 2015), respectivamente. Estos documentos son públicos y de libre acceso a través de Internet.

Se ha hecho un análisis cualitativo del concepto de *estimación* consistente en identificar términos relacionados en los cuatro documentos, marcando segmentos de texto. Es decir, se ha comprobado si los documentos recogen palabras y términos vinculados a las diferentes dimensiones de estimación antes descritas, lo que realmente equivale a la comprobación de la hipótesis de que en las normativas legislativas de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria en España son explícitas las cinco formas de estimación.

4. Resultados y discusión

Los resultados de los análisis se presentan considerando individualmente cada uno de los documentos analizados y tomando como referencia los elementos curriculares definidos en la LOMCE: objetivos, contenidos, criterios de evaluación, estándares de aprendizaje evaluables, competencias y metodología.

El grado de concreción de los contenidos y su secuenciación por curso académico es similar en los documentos analizados.

No obstante, se identifican planteamientos diferenciados: el Ministerio no distribuye los contenidos por cursos o ciclos, Andalucía opta por una secuenciación en tres Ciclos de dos cursos académicos, mientras que Madrid y Castilla y León lo hacen distinguiendo por cursos. En todos los documentos los contenidos son presentados en relación con los criterios de evaluación. Respecto a dichos criterios y a los estándares de aprendizaje evaluables, su grado de concreción es diverso en las tres administraciones.

En relación con las competencias, el planteamiento seguido por las administraciones autonómicas a la hora de elaborar sus documentos curriculares difiere. Andalucía ha introducido los estándares de aprendizaje evaluables que contribuyen a su consecución, a diferencia de Madrid y Castilla y León, que no concretan acciones específicas para su desarrollo desde las áreas.

Las tres normativas autonómicas presentan un apartado específico de orientaciones metodológicas en el que se detallan directrices didácticas o metodológicas para el desarrollo, pero, además, Andalucía especifica estas orientaciones por bloques de contenidos. El Decreto andaluz tiene una estructura única que no presentan los demás, el Desarrollo Curricular del área, donde para cada criterio de evaluación se detallan en una tabla: orientaciones y ejemplificaciones para la evaluación; objetivos del área para la etapa; contenidos, indicando el bloque correspondiente; competencias clave relacionadas con el criterio de evaluación y los indicadores para hacer esa evaluación.

A continuación, presentamos el análisis de la presencia de las diferentes formas de estimación en cada uno de los documentos.

4.1. Currículo nacional

En este documento encontramos menciones al término *estimación* tanto en su desarrollo, concretamente al exponerse los objetivos generales de la etapa, como en la parte del anexo relativa al área de matemáticas en la que, estructurados en bloques, se organizan los contenidos y se relacionan con criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables.

Los objetivos generales que se enuncian para esta etapa se recogen idénticos en todos los documentos que organizan el currículo a nivel regional en los tres casos analizados. Uno de estos objetivos generales recoge la primera mención del término *estimación* que aparece en el documento:

> Desarrollar las competencias matemáticas básicas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana. (p. 19354)

Ello explicita la importancia que tiene para el legislador el concepto de *estimación*, que se repite en el apartado de introducción del área de matemáticas exponiendo el valor instrumental de las matemáticas para conocer y estructurar la realidad, analizarla y obtener información para valorarla y tomar decisiones, destacando la estimación como medio para ello y como vía para obtener información efectiva. Se establece que los objetivos generales del área van encaminados a desarrollar las competencias matemáticas e iniciarse en la resolución de problemas que requieran la realización de operaciones elementales de cálculo, conocimientos geométricos y estimaciones, así como ser capaces de aplicarlos a las situaciones de su vida cotidiana. El legislador insiste en que para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito.

Posteriormente, observamos que la estimación tiene presencia en cuatro de los cinco bloques en que se estructuran los contenidos, concretamente: bloque 1 de procesos, métodos y actitudes en matemáticas; bloque 2 de números; bloque 3 de medida y bloque 5 de estadística y probabilidad. En el primer bloque, aparece en dos estándares de aprendizaje evaluables que refieren a realizar estimaciones sobre los resultados esperados, contrastando su validez y valorando su utilidad y eficacia. En el bloque de números se menciona la estimación como contenido y en dos criterios de evaluación. Dichas menciones refieren a la estimación como procedimiento de cálculo junto a los algoritmos escritos, el cálculo mental, el tanteo y la calculadora. En los contenidos también se incluye el redondeo de números naturales (a las decenas, centenas y millares) y decimales (a la décima, centésima o milésima más cercana). En los estándares de aprendizaje evaluables de este bloque se recoge la acción de estimar (en dos de ellos) y redondear números naturales o decimales o resultados (en tres de ellos). También se hace mención de la recta numérica como representación gráfica a emplear para ordenar números enteros, decimales y fracciones básicas. En el bloque de medida el contenido estimación de medidas se establece como primer paso para la medida efectiva tras elegir la unidad (convencional o no) más adecuada: «Estimación de longitudes, capacidades, masas, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida». También se recoge así en dos de los criterios de evaluación y en uno de los estándares de aprendizaje evaluables, en referencia siempre a las magnitudes longitud, superficie, peso/masa, capacidad y tiempo. En el bloque de estadística y probabilidad, en relación con los contenidos «Carácter aleatorio de algunas experiencias» e «Iniciación intuitiva al cálculo de probabilidades de un suceso», se identifica un criterio de evaluación y un estándar de aprendizaje en los que aparece el término *estimación* en relación con algunos juegos (monedas, dados, cartas, lotería) y el uso de la experiencia del sujeto para interpretar si los resultados son posibles, imposibles, seguros o más o menos probables.

4.2. Currículo de Madrid

En este documento se precisa que los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables para toda la etapa de Educación Primaria son los propuestos en el Real Decreto 126/2014 estatal. La Comunidad de Madrid complementa los contenidos, los une a los estándares de aprendizaje, y los distribuye por cada uno de los seis cursos, salvo los relativos al bloque de contenidos de procesos, métodos y actitudes en matemáticas que los reitera tal cual aparecen en la propuesta del Ministerio.

En el desarrollo de orientaciones metodológicas para la asignatura de matemáticas se destaca el carácter instrumental de las matemáticas. No se incluye aquí el término *estimación*, pero si se alude a la capacidad de «comprobar si es correcta la solución hallada» en el contexto de la resolución de problemas. El término *estimación* aparece por primera vez en cuarto curso, dentro del bloque de números, en el contenido «estima mentalmente el orden de magnitud del resultado de una operación». en quinto curso se incluyen otros contenidos relacionados con la estimación: redondeo de números naturales menores que un millón, el redondeo de decimales al número natural más cercano y redondeo de una fracción al ser expresada en forma decimal. Estos contenidos se amplían en sexto curso considerándose el redondeo de números naturales superiores al millón, de números decimales de hasta cuatro cifras decimales aproximando a la décima, centésima o milésima más cercana y la expresión decimal de una fracción hasta las milésimas. En este bloque se menciona la colocación de números decimales en una recta graduada a partir de cuarto curso, que interpretamos como una recta numérica. En quinto curso se amplía este contenido trasladándolo a un soporte físico («material asequible») para la construcción de reglas graduadas a partir de otras sin graduar en las que se hayan señalado previamente el 0 y el 1. En el bloque de medida encontramos desde primer curso ciertas referencias a la estimación, aunque no se emplea este término. Se incluyen como contenidos el reconocimiento de referentes para las unidades de medida metro, centímetro y kilogramo y a comparación perceptiva de capacidades. En este curso se propone iniciar la medida empleando unidades no estándares que conduzcan a un valor aproximado. En segundo curso se añade como contenido la comparación perceptiva del peso de varios objetos. En cuarto curso aparece un contenido propiamente de estimación, concretamente del área de una superficie dada en una cuadrícula. En relación con el uso y cálculo con monedas, se incluye la realización mental de sumas de precios con céntimos y multiplicaciones por un número natural, redondeando a euros. En el último curso de la etapa es cuando se propone abordar de forma completa la estimación de longitudes, capacidades, pesos, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos. En este curso también se incluye, dentro del bloque de estadística y probabilidad, la iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso que se concreta en dos contenidos: «Identifica la probabilidad de un resultado de un experimento aleatorio con la confianza en que suceda, en una escala de 0 a 1» y «Realiza conjeturas y estimaciones sobre los resultados de algunos juegos (monedas, dados, cartas, etc.)».

4.3. Currículo de Castilla y León

En el apartado relativo a la asignatura de Matemáticas se destaca la relevancia de esta área para el desarrollo cognitivo y el aprendizaje de ciertas destrezas, entre ellas la estimación, y la importancia de que el alumno alcance una eficaz capacidad de alfabetización numérica a través de situaciones de aprendizaje en las que procedimientos como la comparación, estimación y el cálculo mental o escrito sean esenciales.

En el documento encontramos menciones explícitas a la estimación en el cálculo y la medida, no así a la estimación de cantidades ni a la estimación en la recta numérica. Sí se recoge en el currículo la recta numérica como contenido a tratar, concretamente en 1.º, 4.º, 5.º y 6.º. Dentro de los estándares de aprendizaje evaluables del bloque de números en todos los cursos se incluye el uso de esta representación gráfica para ordenar diferentes tipos de números; concretamente, número naturales de hasta dos cifras en primer curso, hasta tres cifras en segundo curso y hasta cinco cifras en tercer curso, en quinto curso se amplía a los decimales y fracciones básicas y en sexto se incluyen también los números enteros.

El bloque de procesos, métodos y actitudes en matemáticas no se refiere explícitamente a la estimación hasta que no desglosa y puntualiza los estándares de aprendizaje evaluables, refiriéndose a la estimación directamente o a «predicciones» sobre los resultados.

En los contenidos del bloque de números se trata el concepto de *redondeo* de números naturales a las decenas, centenas y millares y redondeo de números decimales a la décima, centésima o milésima más cercana y un ítem genérico denominado «Estimación de resultados». En los criterios de evaluación de este bloque se mencionan diferentes procedimientos de cálculo, señalando el tanteo y la estimación como dos de ellos, requiriéndose hacer uso en cada caso del más adecuado. Asimismo, se identifican varios estándares de aprendizaje evaluables que refieren a estimar resultados de cálculos y al redondeo de números decimales a la décima, centésima o milésima más cercana.

En el bloque de medida se incluye como contenido la estimación de longitudes, capacidades, masas, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos. En dos criterios de evaluación se menciona la estimación como un paso previo a la selección de instrumentos y unidades de medida para medir longitud, capacidad, masa y tiempo en contextos reales, para obtener previsiones razonables de los resultados de la medición. En los estándares de aprendizaje se insiste en esta misma idea añadiendo la necesidad de explicar el proceso seguido y la estrategia empleada. Se habla de realizar mediciones en situaciones diversas y partir de unidades corporales, arbitrarias, antes de pasar a la medida normalizada. Esto, pese a que no se menciona explícitamente, puede considerarse una estimación en medida o realización de aproximaciones antes de medir directamente con instrumentos y unidades normalizados.

En el bloque de estadística y probabilidad encontramos elementos relativos al cálculo *a priori* inexacto de la probabilidad de ocurrencia de un suceso. Concretamente, en los contenidos se habla de «iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso» y en los criterios de evaluación a «hacer estimaciones basadas en las experiencias», distinguiendo sucesos imposibles, sucesos casi seguros o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición, en situaciones sencillas en las que intervenga el azar. En los estándares de aprendizaje evaluables se concreta más aún el contexto en el que realizar estas estimaciones refiriendo a juegos (monedas, dados, cartas, lotería...).

En la distribución por cursos podemos ver cosas más concretas, aunque pueden resultar un poco repetitivas. La idea de *estimación*, tanto en medida de magnitudes continuas como en el bloque de probabilidad, va tomando cuerpo y fuerza al ir aumentando el contenido y poder hacer las estimaciones con mayor fundamentación. Hablando de *cálculo*, en todos los cursos de 1.º a 6.º se habla de «estimar el resultado mediante diferentes estrategias» y en 3.º se añade a la frase anterior la valoración sobre si la respuesta es razonable. Hay que destacar que en 4.º curso aparece de forma explícita el uso de las propiedades de las operaciones, pero también de estrategias personales y diferentes procedimientos para realizar un cálculo, y dentro de estos procedimientos distingue entre el cálculo mental, los algoritmos escritos, el tanteo y la estimación. En el caso del bloque de medida, la palabra *estimación* aparece en segundo, pero en primer curso se proponen estándares relevantes, como la comparación entre objetos y la medida no estandarizada, pasos previos al trabajo de la estimación que se propone a partir del siguiente curso. A partir de tercero, con el manejo cada vez más seguro del sistema métrico decimal, los contenidos, criterios y estándares se decantan más hacia una medida exacta. Sin embargo, en la información que se incluye en las tablas, se sigue apreciando el interés por la comparación entre figuras y la estimación de magnitudes lo que permite al alumno realizar una reflexión previa y tener una visión más acertada sobre el resultado que puede obtener antes de realizar un cálculo exacto numérico a través de una fórmula.

En el bloque de estadística y probabilidad, la estimación aparece asociada a juegos en los que no hay una certeza sobre el resultado. Esta aparece únicamente a partir de 3º, primero como idea de suceso seguro, imposible, y luego centrándose en las «conjeturas», que podría tomarse como un sinónimo de *estimación*. En 5.º curso no observamos ninguna apreciación, ni en criterios de evaluación, ni en estándares, aunque sí que consideramos que aparece en los contenidos como una «iniciación intuitiva», lo cual puede servir de ayuda para las conjeturas y estimaciones que deben realizar los alumnos.

4.4. Currículo de Andalucía

En la introducción correspondiente al área de matemáticas reitera las consideraciones sobre el valor instrumental de las matemáticas que se enumeran en el citado decreto, refiriendo a la estimación como una de las herramientas a emplear para tomar decisiones (junto a la deducción, la inducción, la aproximación, etc.) y para obtener información efectiva. En relación con el bloque de números, se insiste en que para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, se precisa también desarrollar estrategias de cálculo mental y aproximativo.

> Interesa principalmente la habilidad para el cálculo con diferentes procedimientos y la decisión en cada caso sobre el que sea más adecuado. A lo largo de la etapa, se pretende que el alumnado calcule con fluidez y haga estimaciones razonables, tratando de lograr un equilibrio entre comprensión conceptual y competencia en el cálculo. (p. 310)

Las estrategias de estimación en el cálculo son destacadas también como necesarias para el adecuado desarrollo del bloque de medida.

En las orientaciones metodológicas para la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas en esta etapa se menciona de forma reiterada la estimación. Se indica que interesa principalmente la habilidad para el cálculo con diferentes procedimientos y la decisión en cada caso de cuál es el más adecuado. A lo largo de la etapa se pretende que el alumnado calcule con fluidez y haga estimaciones razonables, especialmente cuando se cuantifican magnitudes y en contextos reales. Se trabaja la estimación y la medida en el contexto de problemas en los que la elección adecuada de las unidades, la aproximación del resultado y la estimación del error tienen especial importancia, y la realización de mediciones de diferentes magnitudes y en diferentes contextos llevará al manejo de un número progresivamente mayor de unidades, a la elección de unidad y a la idea de aproximación.

De los ocho objetivos que se enumeran para el área, tres hacen referencia a la estimación: uno de ellos relativo al cálculo aproximativo en el contexto de situaciones reales que requieren operaciones elementales; el segundo relativo a la medida utilizando el término «hacer previsiones razonables» al escoger los instrumentos de medida más pertinentes en cada caso; el tercer objetivo, relativo a interpretar los fenómenos ambientales y sociales del entorno, no se refiere a estimar explícitamente, pero sí aparece relacionado con la estimación de la probabilidad de ocurrencia de sucesos en fenómenos aleatorios en juegos con monedas, dados, cartas o lotería.

En el currículo de Andalucía, el bloque de procesos, métodos y actitudes matemáticas se ha formulado con la intención de que sea la columna vertebral del resto de los bloques y de esta manera forme parte del quehacer diario en el aula para trabajar el resto de los contenidos. La idea de estimación aparece como una estrategia heurística: desarrollo de estrategias personales para resolver problemas e investigaciones, aproximar mediante ensayo y error, estimar el resultado, reformular el problema, utilizar tablas, relacionar con problemas afines, realizar esquemas y gráficos, empezar por el final.

Observamos que la estimación tiene presencia en tres bloques: números, medida y estadística y probabilidad. En el bloque de números, los contenidos en los tres ciclos se estructuran de forma cíclica ampliando los conjuntos de números y el cálculo mental y aproximado, redondeo y la estimación del resultado de operaciones. En el primer ciclo ya se indican criterios de estimación tanto para el redondeo de números naturales hasta tres cifras y su representación en la recta numérica como para el cálculo aproximado de operaciones de sumas y restas En el segundo ciclo se introduce por primera vez el uso de la recta numérica para representar fracciones. En el tercer ciclo se amplía el redondeo a tareas de porcentajes (redes numéricas) y series numéricas, donde, además, se pide la explicación oral del proceso seguido en la realización de cálculos mentales. Uno de los indicadores de evaluación es que el estudiante decida, según la naturaleza del cálculo, el procedimiento a utilizar (mental, algorítmico, tanteo, estimación, calculadora), explicando con claridad el proceso seguido.

El contenido de estimaciones en medidas se introduce en el bloque de medida desde el primer ciclo con la búsqueda y utilización de estrategias personales para realizar mediciones del entorno cercano, con dos de los tres indicadores de evaluación concernientes a estimaciones. En orientaciones metodológicas se recoge que hay que reflexionar en la idea de unidad convencional como unidad-patrón acordada como garantía de exactitud y que el desarrollo de proyectos basados en tareas facilitará la integración de actividades de estimación y medida.

En el bloque de estadística y probabilidad del tercer ciclo se insiste en el carácter aleatorio de algunas experiencias: constatar, en situaciones de la vida cotidiana, que hay sucesos imposibles, sucesos que con casi toda seguridad se producen, o que se repiten, siendo más o menos probable esta repetición y hacer estimaciones basadas en la experiencia sobre el resultado (posible, imposible, seguro, más o menos probable) de situaciones en las que intervenga el azar y comprobar dicho resultado.

5. Conclusiones

Los currículos analizados consideran la estimación como objetivo general de etapa de Educación Primaria. Encontramos en ellos referencias a la estimación en cálculo, en medida y la estimación de probabilidades, estando ausente la estimación de cantidades. Aun así, en el marco de cada uno de los currículos analizados este último tipo estimación tiene cabida en el aula por medio de tareas de modelización (tales como los problemas de estimación de grandes cantidades destacados por Ferrando y Albarracín, 2021) que contribuyen a evidenciar la aplicabilidad de los contenidos del currículo en la vida cotidiana y promover la motivación, comprensión y retención en el aprendizaje.

En relación con la estimación en el cálculo, el uso de diferentes estrategias de estimación del resultado de una operación sencilla se presenta como criterio de evaluación en diversos niveles (en Andalucía se introduce en el primer ciclo, mientras que en Castilla y León en el segundo ciclo y Madrid no lo establece); sin embargo, la única estrategia que se presenta es el redondeo, ya sea de números naturales a las decenas, centenas y millares, ya de los decimales a las décimas, centésimas o milésimas más cercanas. Considerando la información que aparece en el documento de Castilla y León, parece que a la estimación que se está refiriendo es esencialmente la relativa al cálculo. En el currículo andaluz, en las orientaciones metodológicas destaca la estimación y la aproximación como estrategias para entender la realidad y que una verdadera alfabetización numérica, como se recoge en el currículo nacional, no se consigue solo con dominar los algoritmos de cálculo escrito.

En el caso de la estimación en medida, aparece en todos los documentos analizados, primero como estimación de magnitudes asociadas directamente a la geometría como longitudes, superficies y volúmenes, trabajo previo a la elección de la unidad propicia para hacer la medición concreta. Antes de usar unidades normalizadas, se induce al uso de unidades informales, que pueden conducir a una apropiación de la magnitud. Este aspecto sería muy interesante de analizar en actividades concretas y libros de texto, ya que la percepción general es que, en los temas relativos a medida, en las aulas se apuesta más por la aplicación directa de fórmulas, lo que no deja de ser un trabajo puramente aritmético, delegando a un segundo plano, cuando no ignorando completamente, el trabajo de estimación precisado antes, tan útil en un aprendizaje basado en la resolución de problemas.

La estimación de la probabilidad se menciona de forma explícita en los currículos analizados en relación con juegos u otras situaciones familiares para iniciar a los estudiantes en el cálculo de probabilidades, de forma intuitiva, a partir de sus experiencias previas. Se pide la expresión de dicha estimación de forma cualitativa, salvo en el caso de Madrid, en que se pide cuantitativamente con valores entre 0 y 1.

Solo en el caso del currículo de Madrid, se reconoce cierta presencia de la estimación en la recta numérica al pedir la construcción de reglas graduadas dando como referencias ubicación del 0 y el 1, si bien en todos los currículo analizados se incluyen contenidos relativos a situar números en una recta numérica, precisándose en algunos casos su utilidad: ordenar diferentes tipos de números (currículo nacional, el andaluz y el castellanoleonés), promover la comprensión e inicio del cálculo con números naturales como racionales (currículo andaluz).

Las ausencias detectadas coinciden con las observadas en estudios previos sobre análisis similares de los currículos de los países del Reino Unido (Andrews *et al.*, 2021) y de Dinamarca, Noruega y Suecia (Sunde *et al.*, 2022), y se encuentran relacionadas con los tipos de estimación que probablemente presentan menor aplicación en la vida cotidiana, pero que la literatura (p. ej.: Simms *et al.*, 2016) destaca como relevantes por su impacto en el posterior aprendizaje de las matemáticas. Se hace necesario analizar los currículos del resto de las autonomías para contrastar los resultados obtenidos en este trabajo. Y, dado que «los libros de texto determinan la práctica de la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos» (Schubring, 1987, p. 41), es necesario complementar estos análisis con el de los libros de texto de Educación Primaria.

6. Referencias

Albarracín, L. (2017). Los problemas de Fermi como actividades para introducir la modelización. *Modelling in Science Education and Learning, 10*(2), 117-135.

Andersson, U. y Östergren, R. (2012). Number magnitude processing and basic cognitive functions in children with mathematical learning disabilities. *Learning and Individual Differences, 22*(6), 701-714.

Andrews, P., Sayers, J. y Xenofontos, C. (2021). Estimation in the mathematics curricula of the United Kingdom: ambivalent expectations of an essential competence. *International Journal of Mathematics Education, Science, and Technology*. DOI: 10.1080/0020739X.2020.1868591

Barth, H., Starr, A. y Sullivan, J. (2009). Children's mappings of large number words to numerosities. *Cognitive Development, 24*(3), 248-264.

Bartelet, D., Vaessen, A., Blomert, L. y Ansari, D. (2014). What basic number processing measures in kindergarten explain unique variability in first-grade arithmetic proficiency? *Journal of Experimental Child Psychology, 117*, 12-28.

De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. (2014). Estimación en cálculo multiplicativo con números decimales. *Enseñanza de las ciencias, 32*(2), 171-190.

Ferrando, I. y Albarracín, L. (2021). Students from grade 2 to grade 10 solving a Fermi problem: analysis of emerging models. *Mathematics Education Research Journal, 33*(1), 61-78.

Gómez-Torres, E. Ortiz, J. J. y Gea, M. M. (2014). Conceptos y propiedades de probabilidad en los libros de texto españoles de educación primaria. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5*, 49-71.

Joram, E., Gabriele, A., Bertheau, M., Gelman, R. y Subrahmanyan, K. (2005). Children's use of the reference point strategy for measurement estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(1), 4-23.

Junta de Andalucía (2015). Decreto 97/2015, de 3 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. *BOJA, 50*, 11-22.

Junta de Castilla y León (2016). Decreto 26/2016, de 21 de julio, por el que se establece el currículo y se regula la implantación, evaluación y desarrollo de la Educación Primaria en la Comunidad de Castilla y León. *BOCyL,142*, 34184-34746.

Junta de Madrid (2014). Decreto 89/2014, de 24 de julio, del Consejo de Gobierno, por el que se establece para la Comunidad de Madrid el Currículo de la Educación Primaria. *BOCM, 175*, 10-89.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Real Decreto 1344/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. *BOE, suplemento del n.º 220*, 3-38.

Ministerio de Educación y Ciencia (2013). Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *BOE, 295*, 97858-97921.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 19349-19420.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* National Council of Teachers of Mathematics.

Reys, R. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. *The Elementary School Journal, 84*, 547-557.

Sayers, J., Petersson, J., Rosenqvist, E. y Andrews, P. (2020). Estimation: an inadequately operationalised national curriculum competence. En: Marks, E. (ed.). *Proceedings of the British Society for Research into Learning Mathematics, 40*(1). BSRLM.

Schubring, G. (1987). On the methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 41-51.

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y en la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 499-536.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida.* Síntesis.

Siegler, R. S., Thompson, C. A. y Opfer, J. E. (2009). The logarithmic-to-linear shift: One learning sequence, many tasks, many time scales. *Mind, Brain, and Education, 3*(3), 143-150.

Simms, V., Clayton, S., Cragg, L., Gilmore, C. y Johnson, S. (2016). Explaining the relationship between number line estimation and mathematical achievement: The role of visuomotor integration and visuospatial skills. *Journal of Experimental Child Psychology, 145*, 22-33.

Sowder, J. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. En: Hiebert, J. y Behr, M. (eds.). *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 182-197). National Council of Teachers of Mathematics.

Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. En: Grouws, D. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 371-389). Macmillan.

Sowder, J. y Wheeler, M. (1989). The development of concepts and strategies used in computational estimation. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 130-146.

Sunde, P. B., Petersson, J., Nosrati, M., Rosenqvist, E. y Andrews, P. (2022). Estimation in the mathematics curricula of Denmark, Norway and Sweden: Inadequate conceptualisations of an essential competence. *Scandinavian Journal of Educational research, 66*(4), 626-641. DOI: 10.1080/00313831.2021.1897881

15

Evaluando la comprensión de la estimación en medida: una propuesta desde el modelo OMIUM

Assessing understanding of estimation in measurement: a proposal from the OMIUM model

Verónica A. Quintanilla y Jesús Gallardo
Universidad de Málaga

Resumen
En este trabajo abordamos la problemática de la evaluación de la estimación en medida desde la perspectiva de un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas (OMIUM). El modelo incluye un método cualitativo para evaluar la comprensión de los estudiantes a partir de los distintos usos dados al conocimiento matemático. Lo aplicamos en un estudio empírico con maestros en formación, enfrentados a una tarea cuya resolución requiere estimar la medida de una superficie irregular. Los resultados obtenidos ponen de manifiesto el empleo amplio y variado, en un mismo episodio, de conocimientos, relaciones y estrategias vinculadas con la estimación. Como conclusión, sugerimos centrar la evaluación en los aspectos positivos de la comprensión de los estudiantes, a través de los usos apropiados y pertinentes que estos hacen del conocimiento matemático.

Palabras clave: comprensión, estimación, evaluación, maestros en formación, medida

Abstract
In this paper we address the problem of assessing estimation in measurement from the perspective of an operative model for interpreting understanding in mathematics (OMIUM). The model includes a qualitative method for assessing students' understanding based on the different uses given to mathematical knowledge. We applied it in an empirical study with pre-service teachers, confronted with a task whose resolution requires estimating the measure of an irregular surface. The results obtained show the wide and varied use, in the

same episode, of knowledge, relations and strategies related to estimation. In conclusion, we suggest focusing the assessment on the positive aspects of understanding, through the appropriate and relevant uses of mathematical knowledge.

Keywords: assessment, estimation, understanding, measurement, pre-service teachers

1. Introducción

Una de las principales dificultades asociadas con la estimación en medida está relacionada con su evaluación en el aula de matemáticas. Hace más de una década, Segovia y Castro (2009) concretaban esta dificultad a través del siguiente interrogante: «¿Cuál es la forma más adecuada de evaluar las producciones de los alumnos en estimación?» (p. 522). Algunos años antes, Frías *et al.* (2001) ya advertían sobre lo inapropiado que resulta utilizar el error cometido al estimar como criterio de evaluación y, como alternativa para evaluar el desempeño de los escolares, proponían explorar otras relaciones cuantitativas entre la medida real de la magnitud y el valor aproximado dado en la estimación. En este trabajo, retomamos esta cuestión para abordarla, de manera complementaria, desde una perspectiva cualitativa. En concreto, presentamos una propuesta de evaluación basada en la caracterización de la comprensión de los estudiantes a partir de los distintos conocimientos, relaciones y estrategias que utilizan cuando realizan estimaciones en actividades de medida.

En los últimos años, venimos trabajando en un modelo operativo (*Operative Model for Interpreting Understanding in Mathematics [OMIUM]*) para abordar en la práctica la complejidad de los procesos interpretativos involucrados en la comprensión en matemáticas (Gallardo *et al.*, 2013; 2014; Gallardo y Quintanilla, 2016; 2019; Quintanilla y Gallardo, 2021). El modelo incorpora un método específico para observar e interpretar la comprensión a través de los usos del conocimiento matemático. En este trabajo aplicamos dicho método en un estudio empírico con maestros en formación involucrados en la resolución de una actividad de estimación de la medida de una superficie irregular. La evaluación realizada desde esta perspectiva nos permite delimitar lo que los estudiantes comprenden y cómo lo comprenden al estimar, a través de lo que son capaces de hacer con el conocimiento matemático. También identificamos en cada caso posibilidades concretas de mejora para la comprensión de la estimación en medida.

2. Comprensión de la estimación en medida

En términos genéricos, la estimación en medida suele asumirse como la valoración del resultado de una medición sin ayuda de instrumentos (Segovia y Castro, 2009). Su aprendizaje con comprensión está íntimamente vinculado con el desarrollo del sentido de la medida, al poner en juego distintos conocimientos, procesos y propiedades básicas involucradas en la acción de medir, como la identificación de la magnitud y sus características, la selección de unidades, el uso de referentes o la aplicación de estrategias como la comparación o la descomposición/recomposición (Segovia y De Castro, 2013; Moreno *et al*., 2015).

La importancia de garantizar una enseñanza para la comprensión de la estimación en los distintos niveles educativos suele justificarse por razones prácticas y formativas. Por una parte, la estimación posee un evidente valor práctico para los estudiantes, pues les permite responder con el uso del conocimiento matemático a ciertas necesidades del mundo real. En particular, facilita los procesos de medición en la vida cotidiana mediante la construcción de relaciones entre los objetos del entorno y las distintas unidades de medida (Moreno *et al*., 2015; Segovia y De Castro, 2013). La estimación también contribuye a la formación de los estudiantes, al tratarse de un proceso que requiere el uso del razonamiento y la comunicación matemática, el dominio en la aplicación de estrategias fundamentales de medida y una capacidad para conectar ámbitos como la geometría y la aritmética.

La evaluación de la comprensión de los escolares al estimar en medida puede enfocarse hacia las maneras insuficientes o incorrectas de utilizar el conocimiento matemático y a la caracterización de los distintos tipos de errores cometidos. La percepción equivocada de la magnitud, el empleo de unidades no adecuadas, la conversión incorrecta de unidades de medida o la ausencia de unidades de medida para expresar el resultado son algunos de los errores frecuentes entre los estudiantes. Sin embargo, esta evaluación, así planteada, puede ampliarse si dirigimos la atención hacia los modos pertinentes de uso de los principales conocimientos matemáticos que intervienen en la estimación en medida. Si adoptamos este punto de vista positivo, trabajos como los de Segovia y Castro (2009) y Segovia y De Castro (2013) nos ayudan a identificar los distintos aspectos relacionados con el propio proceso de estimación, que también pueden ser considerados para la evaluación como indicadores favorables de la comprensión de los estudiantes. Algunos de estos aspectos representativos son los siguientes: *a*) identificar situaciones problemáticas en las que no es posible realizar, o bien no requieren, una medida exacta para su resolución; *b*) reconocer que la estimación es un procedimiento por el que se obtienen valores aproximados; *c*) determinar el orden de magnitud correcto y seleccionar unidades de medida adecuadas; *d*) aceptar y reformular diferentes estrategias de estimación; *e*) valorar posibles resultados y refinar valores aproximados distintos; *f*) decidir cuándo una estimación es aceptable. Además, tal como subrayan estos mismos autores, estos últimos aspectos están vinculados con la precisión al estimar, la cual depende de la propia magnitud y de la forma y posición en la que se presenta el objeto a medir. También depende de quién realiza la estimación, mejorando con la edad y la práctica. En nuestra propuesta de evaluación, tomaremos en consideración estos aspectos reseñados relacionados con la actividad de estimar como referencia para poner en valor lo que los estudiantes comprenden acerca de la estimación en medida, a partir de los distintos usos dados al conocimiento matemático en la resolución de una tarea concreta de estimación.

3. Un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas

En esta sección, exponemos una breve síntesis de las principales bases teórico-metodológicas que configuran nuestro modelo para la interpretación de la comprensión en matemáticas, provenientes de las cuatro dimensiones relacionadas que dicho modelo exhibe en la actualidad (fenómeno-epistemológica, hermenéutica, socioafectiva y ética).

3.1. Bases teóricas

Consideramos que la comprensión del conocimiento matemático demanda unas exigencias intelectuales necesariamente vinculadas a la esfera cognitiva de quien la desarrolla. No obstante, la complejidad relativa al funcionamiento cognitivo aconseja adoptar un enfoque funcional en el estudio de la comprensión. En lugar de aclarar su naturaleza interna, nos parece más operativo destinar esfuerzos a explorar las condiciones que posibilitan la comprensión, a través de los requerimientos impuestos por la resolución de las situaciones problemáticas vinculadas a los distintos conocimientos matemáticos puestos en uso.

En el OMIUM apostamos por esta funcionalidad al reconocer que la comprensión de un conocimiento matemático está ligada a las experiencias matemáticas que se producen a través de las situaciones en las que interviene dicho conocimiento como medio de resolución. En este sentido, los estudiantes manifiestan una cierta comprensión en relación con un conocimiento matemático concreto cuando, ante situaciones de desequilibrio cognitivo que deciden voluntariamente abordar, elaboran y emiten a su satisfacción respuestas adaptadas donde hacen un uso significativo (libre, consciente e intencional) de este conocimiento. Esto conlleva analizar la situación, interpretar la información disponible, determinar la conveniencia de intervenir y actuar en consecuencia fabricando una respuesta donde tiene cabida el empleo del conocimiento matemático en cuestión, valorar la intervención en términos de efectividad y adecuación de esta a la situación de interacción vivida y decidir finalizar la intervención o continuarla retomando algunos pasos del proceso. Así pues, concebimos la comprensión en matemáticas como una actividad intelectual que capacita al individuo para elaborar respuestas observables, adaptadas y contextualizadas que involucran la utilización registrable e interpretable del conocimiento matemático. El aprendizaje surge como consecuencia de esta comprensión, ligada a la funcionalidad del conocimiento matemático. Por ello, afirmamos que un individuo comprende un conocimiento matemático si es capaz de emplearlo, en alguna de sus formas posibles, en aquellas situaciones en las que tenga sentido y contribuya como medio de resolución (Gallardo *et al.*, 2014; Gallardo y Quintanilla, 2016).

Esta visión funcional de la comprensión incorpora un punto de vista particular sobre el propio conocimiento matemático. Por una parte, los conocimientos matemáticos no siempre se utilizan del mismo modo y son los componentes caracterizadores de su estructura epistemológica los que establecen en cada caso los distintos requisitos condicionantes de su empleo intencionado por parte del individuo. Por otra parte, las situaciones matemáticas demandan la identificación de aquellos conocimientos matemáticos susceptibles de poderse emplear en ellas, en alguna de sus formas posibles, como medio de resolución, así como la decisión sobre cuál conocimiento matemático emplear, y de qué modo, entre las posibilidades identificadas previamente. La consideración conjunta de ambos aspectos nos permite percibir una relación de conocimientos matemáticos y situaciones asociadas, conectados entre sí mediante vínculos epistemológicos (conocimiento-conocimiento) y fenomenológicos (conocimiento-situación) (Gallardo *et al.*, 2013, 2014).

3.2. Bases metodológicas

El OMIUM incluye un método cíclico para el diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático, denominado *círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas* (Gallardo y Quintanilla, 2019; Quintanilla y Gallardo, 2021), constituido por cuatro planos por los que el intérprete/evaluador debe transitar. En el *plano cognitivo*, ubicamos a la comprensión matemática, como actividad intelectual del estudiante que le capacita para elaborar respuestas que involucran el uso de conocimientos matemáticos específicos. En el *plano semiótico* registramos en diferentes sistemas de representación las diversas evidencias observables de la actividad matemática realizada por el alumno. La capacidad para elaborar respuestas que involucran el uso de conocimientos matemáticos específicos se muestra a través de distintos registros externos que son los depositarios de los rastros genuinos de comprensión del estudiante. La identificación de dichos rastros por parte del intérprete se lleva a cabo en este primer plano. A continuación, la interpretación prosigue en el *plano fenómeno-epistemológico*, centrada en la caracterización de los usos del conocimiento matemático identificados en los registros previos y puestos en juego por el estudiante durante la experiencia matemática. Aquí buscamos referencias externas centradas en el actuar, más allá del registro observable literal. Para ello, nos servimos de análisis fenómeno-epistemológicos del propio conocimiento matemático objeto de comprensión o de la situación problemática planteada. Finalmente, en el *plano dialógico* el estudiante recupera su papel protagónico involucrándose de manera directa y real junto con el intérprete en los procesos interpretativos de su propia comprensión matemática. Este, por su parte, comparte sus hallazgos con aquel, en términos de discrepancias, posibles obstáculos o incongruencias identificadas en los planos interpretativos previos. La interpretación requiere ahora la elaboración de nuevas narrativas personales por parte del alumno. Este plano ofrece un entorno común propicio para el discurso, la discusión crítica y el intercambio necesario con el que buscamos alcanzar en última instancia el consentimiento con el otro (Gallardo y Quintanilla, 2016, 2019).

4. Metodología

En la práctica, contrastamos la idoneidad de nuestro modelo interpretativo realizando un estudio empírico cualitativo donde aplicamos el círculo hermenéutico en el ámbito de la medida con maestros en formación.

4.1. Muestra y contexto de aula

En la investigación participaron 20 estudiantes voluntarios de cuarto curso del Grado en Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Málaga, que cursaban la asignatura Didáctica de la Medida durante el segundo cuatrimestre del curso académico 2017-2018. Estos participantes organizados en parejas configuran la muestra del estudio empírico realizado. Es la propia investigadora principal de la investigación la que ejerció de profesora de la asignatura. Los alumnos de la muestra participaron en las diferentes actividades planteadas en su aula ordinaria, en el horario habitual de clase y con el resto de los compañeros del grupo. El estudio transcurrió a lo largo de nueve semanas, entre los meses de marzo y mayo de 2018, durante las dos horas semanales de práctica de la asignatura.

4.2. Tarea matemática

Se plantearon a las parejas cinco tareas del ámbito de la medida en forma de práctica de aula. La selección se efectuó tomando cada tarea representativa de las distintas fases por las que transita el proceso de fundamentación matemática de la medida de magnitudes, según la propuesta de González y Gómez (2011) adoptada en la asignatura. En esencia, este proceso requiere identificación de magnitudes, conservación y comparación de cantidades de magnitud, elección de unidades de medida, cuantificación y uso de instrumentos de medida, y aritmetización. Son tareas no equivalentes cuya resolución conjunta nos permite caracterizar la comprensión de la medida que poseen los maestros en formación. En este trabajo, ilustramos la aplicación de nuestra propuesta interpretativa en el estudio empírico realizado a partir de los registros generados por tres parejas diferentes al resolver una de las tareas empleadas, centrada en la estimación de medida de superficie (figura 1).

¿Cuánto mide la superficie de la mano?

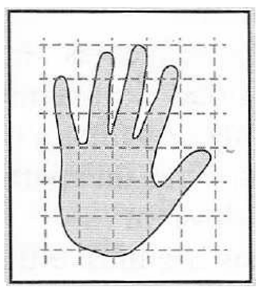


Figura 1. Tarea de estimación de medida de una superficie irregular (González y Gómez, 2011, p. 370).

La resolución de la tarea permite el uso de procesos básicos de medida. Una opción podría ser considerar la cuadrícula como intermediario, identificar el cuadrado como unidad de medida, iterar dicha unidad para pavimentar la superficie de la mano y relacionar el número de unidades empleadas en la medida con el área total de la superficie. También cabe la posibilidad de emplear estrategias que conjugan la comparación con procesos de descomposición/recomposición de la mano en partes que se asemejen a polígonos regulares (p. ej.: cuadrados o rectángulos). En todo caso, el resultado del proceso de medición será una aproximación, teniendo en cuenta las líneas curvas que delimitan la forma irregular de la figura.

4.3. Fases e instrumentos

La interpretación de la comprensión de cada pareja de maestros se desarrolla en dos fases consecutivas en las que empleamos diferentes instrumentos de recogida de datos.

- Fase 1: resolución conjunta de tareas. Cada pareja resuelve las distintas tareas planteadas de manera colaborativa, procurando buscar estrategias, procedimientos y resultados comunes. En esta fase, caracterizamos los usos dados a los conocimientos matemáticos desplegados durante la resolución de las tareas (planos semiótico y fenómeno-epistemológico del círculo hermenéutico). También identificamos información relevante sobre el desempeño matemático del alumno obtenida de modo aún insuficiente, posibles obstáculos o incoherencias o posibilidades inesperadas de resolución. Toda la actividad matemática desarrollada se graba en audio y vídeo. El registro observable generado se compone de producciones escritas y diálogo transcrito.
- Fase 2: búsqueda del consentimiento con el otro. Se lleva a cabo de forma individual una entrevista conversacional en la que se solicita a cada estudiante una narrativa verbal sobre los conocimientos matemáticos empleados durante la resolución de las tareas. La investigadora, por su parte, comparte sus hallazgos a partir de los resultados obtenidos en la fase anterior y presenta una interpretación de la actividad matemática del alumno con el propósito de alcanzar el consentimiento con él en lo relativo a los usos dados a los conocimientos matemáticos (plano dialógico). Cada entrevista realizada se graba en audio y su transcripción genera el segundo de los registros escritos empleados en la obtención de datos.

4.4. Análisis e interpretación de datos

En los planos semiótico y fenómeno-epistemológico del círculo buscamos identificar rastros de la comprensión matemática desplegada por los participantes y, con base en ellos, describir los usos dados a los diferentes conocimientos matemáticos puestos en juego. Para esta labor, utilizamos como referencia el análisis fenómeno-epistemológico previo aplicado sobre la tarea, donde explicitamos los conocimientos, relaciones y estrategias fundamentales que pueden intervenir en su resolución (tabla 1). Lo hacemos tomando en consideración la información específica sobre comprensión de la estimación en medida reseñada en los antecedentes descritos en el trabajo. En el plano dialógico del círculo, por su parte, contrastamos la actividad matemática de los protagonistas durante el episodio, establecemos sus relaciones con los usos dados al conocimiento matemático y estructuramos las conclusiones sobre su comprensión en torno a la estimación.

Tabla 1. Análisis fenómeno-epistemológico de la tarea de estimación.

Conocimientos matemáticos	Atributos medibles, magnitud superficie, orden de magnitud, área como cantidad de superficie, unidad de superficie (cuadrado), submúltiplos de la unidad, referente (figura geométrica), valor aproximado, precisión.
Relaciones	Medida y geometría, medida y aritmética, área y superficie, superficie de distintas figuras geométricas básicas (equivalencia), líneas rectas y curvas, distintas unidades de medida, unidad y figura, unidad y referentes (presentes y ausentes), valor numérico de la medida y unidad utilizada.
Estrategias	Comparar superficies, seleccionar unidades de medida, iterar unidades, pavimentar superficies con una unidad, descomponer/recomponer, modificar la figura, utilizar referentes, emplear fórmulas, cuantificar, acotar el resultado entre valores, aproximar, valorar la idoneidad del resultado, compensar y refinar la medida obtenida, reformular y considerar otras estrategias de estimación.

5. Resultados

Las parejas de maestros en formación se enfrentaron de manera conjunta a la resolución de la tarea de estimación de la superficie de la mano. En cada episodio, los registros obtenidos nos proporcionaron distintas evidencias sobre los usos dados a los conocimientos matemáticos, a partir de los cuales caracterizamos la comprensión de los estudiantes.

5.1. Sobre la comprensión de E1 y E2

Planos semiótico y fenómeno-epistemológico

La estrategia de medida de esta pareja se basa en comparar la cantidad a estimar con un referente ausente aproximadamente igual. En este caso, los alumnos buscan circunscribir la mano en un pentágono (sobreestimación), cuya área les parece más fácil calcular y, de este modo, aportar al menos un valor aproximado de la medida exacta de la superficie (figura 2).

Al inicio de la resolución, E1 sugiere a su compañero utilizar la simetría que ella percibe al observar y trazar líneas imaginarias sobre la superficie de su propia mano. E2, mientras tanto, reconoce que pavimentar la superficie tomando como unidad de medida el cuadrado de la cuadrícula no resulta una estrategia efectiva para aplicar en la mano, argumentando que, debido a su contorno curvo e irregular, no podrá completar trozos de la figura con el cuadrado.

E1: Podemos decir que la mano tiene una simetría [observa su mano].

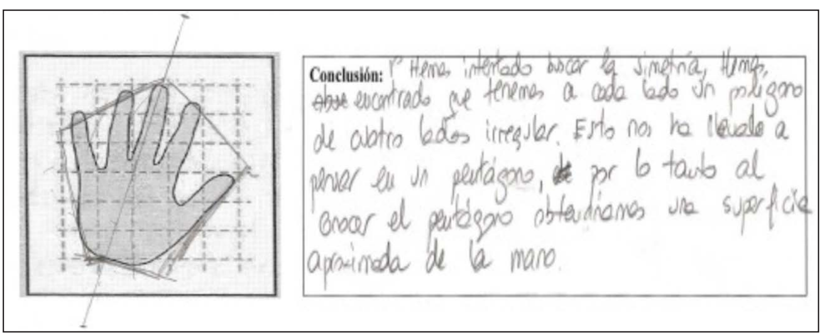


Figura 2. Registro escrito de E1 y E2.

E2: Tenemos nuestros cuadraditos, pero al ser irregular ya no es como antes. Aquí, es que no podemos hacer eso. Aunque tú digas, meto un pedazo aquí, ya nos está quedando un cachito vacío.

E1 pretende generar, a partir de su simetría (equivocada), polígonos de área aproximada a la de la superficie de la mano. Aunque E2 duda sobre cuánto puede ayudar realmente esta estrategia en la búsqueda de una solución, finalmente expresa su acuerdo con su compañera sobre la pertinencia de aplicarla. Convenida la elección del pentágono como referente, ambos estudiantes reconocen que solo podrán obtener una aproximación del valor exacto de la medida de la superficie.

E1: Creo que podríamos ejecutar simetría.
E2: Pero estamos en las mismas. Haces una simetría y ahora cómo calculamos esto [risas]. ¡Es que es irregular!
E1: Una vez que hemos hecho la simetría, podríamos hacer... a lo mejor... un polígono de cuatro lados irregular.
E2: Tenemos un pentágono. Ahora, que sea un pentágono regular, no. Regular creo que no es, ni en broma, vamos. Sabemos que el resultado que nos da no es exacto, ya que hay partes que se encuentran dentro del polígono que no tienen...
E1: Que no está rellenada la mano.
E2: Y, por lo tanto, lo que tenemos es una aproximación. Yo creo que una... exactitud no se puede obtener. Creo.

Finalmente, acuerdan estimar la medida de la superficie de la mano a través de un procedimiento indirecto, aunque no llegan a desarrollar en la práctica el cálculo del área de los cuadriláteros irregulares trazados ni del pentágono asociado (p. ej.: mediante el uso de fórmulas conocidas) y tampoco proporcionan una solución numérica a la tarea.

E1: Esa es la conclusión final a la que hemos llegado. Una vez que hemos buscado la simetría, hemos visto que ya teníamos un polígono de cuatro lados irregular, a cada lado. Esto nos ha llevado a ver que podíamos observar un pentágono...
E2: Y ya obtendríamos una superficie aproximada de la mano, por lo tanto, al conocer el pentágono.

En la tabla 2 resumimos los principales resultados obtenidos sobre la comprensión de la estimación por parte de E1 y E2 tras el recorrido por los planos semiótico y fenómeno-epistemológico del círculo.

Tabla 2. Interpretación de la comprensión de E1 y E2

Conocimientos matemáticos	Superficie, unidad de superficie, cuadrilátero, pentágono.
Relaciones	Medida y geometría, unidad y referente, figuras geométricas básicas.
Estrategias	Comparar con referentes ausentes aproximados, medir de forma indirecta, uso de analogías, descomponer, reformular la estimación.

Plano dialógico

En la fase de búsqueda de consentimiento con E1 y E2, obtenemos confirmación sobre la pertinencia de utilizar la estrategia de pavimentar la figura a partir de la cuadrícula base. Inicialmente, los contornos curvos de la mano disuadieron a E1 de considerar la estrategia de recubrir la figura descomponiendo/recomponiendo con el cuadrado unidad. No obstante, en esta segunda fase ambos reconocen esta opción como forma válida de obtener un valor aproximado de la medida exacta de la superficie, aunque, por su complejidad, no la llevan a la práctica.

I: [Tras sugerirle pavimentar la superficie de la mano usando la cuadrícula y tomando el cuadrado como unidad] ¿Crees que esta estrategia pudo haber funcionado?

E1: Sí, pero en aproximación. Porque no rellenamos el cuadrado entero. Este medio y medio, podemos hacerlo así y hubiéramos puesto tantos cuadrados. Dándole a cada cuadrado el valor de uno.

E2: Sí. Metiéndolo en una cuadrícula, sí. Claro, este metido en la cuadrícula, contando los cuadraditos... sí. Podría tener la medida. Porque es verdad que aquí sería aproximadamente medio triángulo, aquí... ¡ufff! Claro, es que también hay partes que no tenemos ni uno ni medio. No tengo ni medio ni uno...

En relación con la aproximación, la pareja otorga validez a las respuestas aproximadas al estimar la medida de superficies irregulares. Reconocen que la posible medida resultante no es exacta, pero sí adecuada. Aun así, al no proporcionar una solución concreta al problema, no sienten la necesidad de valorar la idoneidad de la precisión en la estimación realizada ni comprobar la coherencia del resultado obtenido.

E1: No se podían dar medidas exactas, porque una mano es irregular. Entonces, aquí tenemos que trabajar con la aproximación.
I: Si das una respuesta aproximada, ¿es correcta?
E2: Claro. Al medir puede dar una aproximación de lo que mide el área de la mano. Se da la aproximación y puedes despreciar algo.

5.2. Sobre la comprensión de E3 y E4

Planos semiótico y fenómeno-epistemológico

Esta pareja utiliza como estrategia principal la comparación de la cantidad a estimar con un referente presente aproximadamente igual. Encierran la mano en un rectángulo inicial, que trazan usando la cuadrícula base, y calculan su área de manera indirecta mediante la correspondiente fórmula. Repiten el proceso con un segundo rectángulo, buscando mayor precisión en la estimación (figura 3).

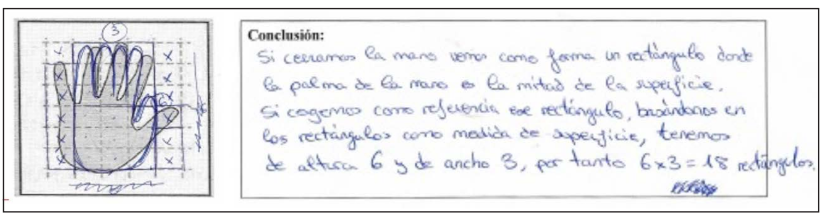


Figura 3. Registro escrito de E3 y E4.

El contorno irregular de la mano motivó que E3 y E4 descartaran de inicio la estrategia de medición directa por descomposición/recomposición de la figura y pavimentación con el cuadrado unidad, que ya habían utilizado con éxito en la resolución de tareas previas. Como alternativa, las estudiantes inician la resolución trazando un rectángulo de dimensiones 5 × 6 y tomando el cuadrado de la cuadrícula como unidad de superficie. Calculan su área de manera exacta mediante la fórmula conocida (base × altura). Al mismo tiempo, cuentan y marcan los cuadrados que consideran vacíos y restan su área del valor total obtenido para el rectángulo.

E3: Mira: 1, 2, 3, 4, 5 y 6. 30 menos 6, 24. A ver, estas de aquí eran cinco, ¿no? Y esto de aquí es 6, ¿no? Entonces, sí. Es 6, ya está [cuadrados sin parte de la mano].
E4: 5 por 6 serían 30 cuadraditos [rectángulo que contiene la mano] y si le quitamos este, este y este, porque es como que le sobra mucho, pues serían 30 menos 6, 24.

Tras esta primera aproximación, E3 y E4 centran la atención en la cuestión de la precisión de la estimación realizada. Reconocen que la medida no puede ser exacta y discuten sobre la pertinencia del valor obtenido como aproximación de la superficie a partir de la cuadrícula.

E3: Pero nosotras estamos cogiendo como referencia los rectángulos, cuando podemos coger otros, ¿no?
E4: ¿Qué vas a coger? ¿Triángulos? Es que como está la cuadrícula, vamos a usar la cuadrícula.
E3: ¿Tiene que ser exacto?
E4: No lo puedes saber exacto. Más o menos a ojo, puedes tomar como referencia los cuadrados, pero no puedes saber con... Tú coges tu mano y no puedes calcular...
E3: Sí, pero es que, al ser redondo, no van a encajar.
E4: 24 cuadraditos.

A pesar del convencimiento de E4, las dudas planteadas por E3 sobre lo realizado hasta ahora abre nuevas posibilidades en la resolución de la tarea. Al percibir que el movimiento de la mano es una transformación que deja invariante a la superficie, proponen un nuevo rectángulo como referente para circunscribir la mano, ahora cerrada, de una manera más ajustada. El cálculo del área de este segundo rectángulo, también a través de la fórmula y con el cuadrado como unidad, genera otra medida aproximada, aunque más precisa, de la superficie de la mano.

E3: Es que no me convence, soy muy cabezona. Es que si tú coges estos dedos, si los cierras, si tú coges y la cierras [la mano], esto mide lo mismo que esto. Sería... 1, 2, 3, 4, 5 y 6. Serían 6 cuadrados metiendo dos dedos en cada fila, ¿no? Ahora mismo, aquí serían 6 cuadraditos.

E4: Mira, yo voy a hacer el rectángulo entero, ¿vale? Sería este rectángulo entero lo que ocuparía la mano cerrada completamente con el dedo pulgar. El dedo pulgar, cuando tú lo cierras, se subiría aquí. O sea, si pongo la mano recta, entonces entraría dentro de esto, con la mano cerrada y el pulgar, de manera que el pulgar esté pegado al índice y el dedo meñique estaría dentro del rectángulo.

E3: Pues este rectángulo.

E4: Sería la superficie.

E3: Sería: 1, 2, 3 [base] y 1, 2, 3, 4, 5 y 6 [altura]. 3 por 6, 18.

En la tabla 3 exponemos las principales evidencias de comprensión manifestadas por E3 y E4 durante la resolución de la tarea.

Tabla 3. Interpretación de la comprensión de E3 y E4.

Conocimientos matemáticos	Magnitud superficie, área como cantidad de superficie, unidad de medida de superficie, comparación de unidades, figuras geométricas básicas (cuadrado y rectángulo), fórmula del área del rectángulo, precisión.
Relaciones	Área y superficie, figuras geométricas básicas, unidad y referente, transformaciones invariantes de la medida.
Estrategias	Comparar con referentes presentes, elegir la unidad, modificar la figura, aproximar, emplear fórmulas, cuantificar, refinar la medida.

Plano dialógico

En esta ocasión, buscamos el consentimiento con E3 y E4 en lo relativo a su opción de plantear un nuevo proceso de medición para alcanzar mayor precisión en la estimación. También dialogamos sobre la razón por la que buscan esta precisión, que parece estar relacionada con una creencia escolar sobre la necesidad de proporcionar respuestas exactas. En sus explicaciones, encontramos indicios de una falta de reconocimiento de la aproximación como valor legítimo de medida.

E3: No estaba de acuerdo con E4, porque ella me decía de quitar los cuadraditos estos que son los que sobran. Pero es que aquí también lo cubre un poquito. Yo me miraba mi mano y miraba el papel. En un momento, dije: ¡anda! La superficie no va a cambiar y me imaginé un rectángulo, quitando, cortando.

E4: Cuando ella dijo: si cerramos la mano, todo este espacio desaparecería. Yo dije: vale, llevas razón [risas]. Ya lo pensamos así y lo reducimos. Por eso, creo que pusimos 24 cuadrados y al final se quedó en 18. Y lo que es el total, pienso que sería más exacto dentro de lo inexacto que es eso [risas].

I: ¿Es una medida aproximada?

E4: Sí. Totalmente aproximada.

I: ¿Eso es bueno o malo?

E4: Por lo general, siempre que nos han preguntado de pequeñas, tienes que decir la respuesta que es, a menos que te digan «aproxima». Entonces, cuando te preguntan algo, tienes que decir la verdad absoluta. Porque si aproximas, es como que pierde credibilidad lo que estás diciendo.

5.3. Sobre la comprensión de E5 y E6

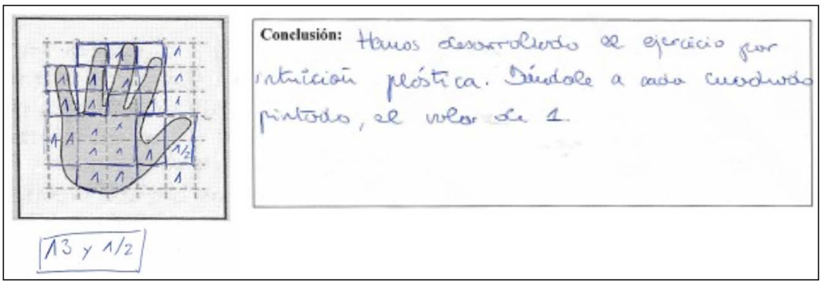


Figura 4. Registro escrito de E5 y E6.

Planos semiótico y fenómeno-epistemológico

Esta pareja estima la superficie empleando como estrategia principal la descomposición/recomposición de la figura en partes diferentes. En concreto, los estudiantes recubren la mano completando cuadrados a ojo, que usan como unidad de superficie, y proporcionan como resultado aproximado el número total de cuadrados completados (figura 5).

Como primera aproximación a la resolución de la tarea, E5 plantea restar al área del cuadrado total que delimita la figura, el de la superficie exterior de la mano, constituida por cuadrados sin partes de mano (estrategia de comparación con referentes presentes). Sin embargo, de inmediato desvían la atención hacia la estrategia sugerida por E6 de completar la figura con el cuadrado unidad, componiendo/recomponiendo partes diferentes de la figura (dedos, palma...).

E5: Creo que tiene que ver algo con contar también el área de fuera y luego la restamos con la de dentro, algo así. O sea, la superficie de fuera. O sea, cuál es el total y cuánto ocupa cada parte. Es un poco complicado, porque aquí tenemos esto...
E6: Ya... Aquí, si te pones a buscar alguno que sea parecido, por ejemplo, este hueco de aquí, ¿no? Intentar buscar algún trozo que entre aquí. Que, por ejemplo, podría ser este, fácilmente. Este dedo sí entra aquí. Más o menos, aproximadamente, ¿sabes?

A partir de aquí, E5 y E6 van trazando cuadrados y rectángulos (uniendo cuadrados) sobre la cuadrícula base, en horizontal y vertical. Etiquetan con 1 las partes conjuntas que perciben como cuadrados completos. Esta labor la llevan a cabo visualmente, de manera imprecisa y siempre aproximada (lo que ellos denominan «por intuición plástica»).

E5: Ya por ahí hay algo... Por ejemplo, mira toda esta parte, de aquí a aquí, en teoría, tiene que ser la misma. Estos dos cuadrados tienen que ser exactamente iguales.
E6: O sea, que serían la mitad y sería un cuadrado completo.
E5: Claro. Mira, esta parte de la mano. Esto es uno. O sea, son dos.
E6: Vale, sí. Porque aquí también le falta un trocito.
E5: Claro. Más o menos por ahí se puede sacar eso.
E6: Mira, el dedo, por ejemplo. Este cuadrado lo puedes llenar con este trocito.
E5: Sí. Porque también aquí le falta un poco. Y aquí otro poco. Por eso sería un cuadrado solo.

E5 y E6 concluyen la resolución asignando 1/2 al área del extremo del pulgar y sumando todos los cuadrados completos que logran etiquetar. Obtienen como medida final 13,5 cuadrados unidad.

E5: Mira, por ejemplo, con estos tres dedos de arriba. Lo que serían las yemas de los tres dedos de arriba. Los tres cuadrados, ¿ves? Se podría rellenar un cuadrado entero.

E6: Sí.

E5: Falta la yema del dedo gordo, esa es la que puede ser medio cuadrado.

E6: Puede ser medio. Entonces, en total tendríamos uno... Sí, uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, doce, trece. Trece y medio. Es que otra forma...

En la tabla 4 caracterizamos la comprensión de E5 y E6 por los principales usos dados a los conocimientos matemáticos, relaciones y estrategias durante la resolución.

Tabla 4. Interpretación de la comprensión de E5 y E6.

Conocimientos matemáticos	Superficie, orden de magnitud, unidad de superficie, submúltiplos de la unidad, área, valor aproximado.
Relaciones	Área y superficie, figuras geométricas básicas, unidad y figura, valor numérico de la medida y unidad utilizada.
Estrategias	Aproximar, descomponer/recomponer la figura en partes diferentes, comparar superficies, cuantificar, sumar partes, reformular la estimación.

Plano dialógico

En este caso, la búsqueda de consentimiento gira en torno a la estrategia de estimación empleada por E5 y E6, así como a la principal dificultad encontrada en la tarea. Confirman su opción de descomponer/recomponer la figura con el uso del cuadrado unidad y ya no vuelven a mencionar la primera alternativa descartada al inicio de la resolución. La forma irregular de la mano los lleva a aplicar su proceso de manera aproximada y, aunque perciben defectos al completar la unidad, no se preocupan por explorar posibles reajustes o refinamientos que mejoren la precisión del valor logrado en la medida de la superficie.

I: Utilizaste la estrategia de elegir una unidad y contar cuántas caben en la superficie, ¿no?

E6: Sí, básicamente. Estos cuatro de aquí estaban completos. Ahora, si juntábamos estos dos, como nos sobraba aquí un cachito, lo podíamos poner aquí y aquí y ya teníamos otros dos cuadrados. Después, aquí y aquí, teníamos que había medio y medio, pues uno. Con eso, al fin del mundo íbamos nosotros.

E5: Al ser una mano, no cubre espacios de los cuadrados que a lo mejor son distintos. Entonces, a la hora de darle valor 1 a un cuadrado para rellenar un cuadrado, si te fijas en el dedo gordo, es muy complicado rellenar ese espacio. ¿Con qué lo rellenas? Nosotros decíamos: pues con ese y este con este. Así, más o menos, se saca uno. Y luego, intentar sacar la mayoría de 1 posibles para llegar al final, que era lo que te pedía: la superficie. Sí, completando a la unidad.

6. Discusión y conclusión

El estudio realizado nos ha aportado diversas evidencias favorables de la comprensión que poseen tres parejas de maestros en formación sobre la estimación en medida, a través de los distintos usos dados a conocimientos matemáticos, relaciones y estrategias de resolución a lo largo del episodio descrito. En concreto, E1 y E2 identifican la superficie como magnitud, deciden utilizar la estimación cuando reconocen que no es posible hacer una medida exacta, descomponen la figura en partes que se asemejan a polígonos de áreas conocidas (cuadriláteros y pentágono), plantean, pese a que no efectúan, el cálculo del área de estos referentes, reconocen sin desarrollar otras posibles estrategias de medida y asumen el resultado de la medición como una aproximación, pero sin valorar su precisión. Por su parte, E3 y E4 muestran tener comprensión sobre conceptos involucrados en la medida de magnitudes, como los de *superficie*, *unidad de medida*, *área del rectángulo* o *valor aproximado*, entre otros. Al estimar, también ponen en juego distintas relaciones y procesos básicos, como la comparación con figuras geométricas básicas, la elección de una unidad de medida pertinente, invariantes de la medida de superficie, el cálculo de áreas con fórmulas simples o la diferencia entre medida exacta y aproximada. Finalmente, E5 y E6 también evidencian comprensión sobre distintos aspectos vinculados con la estimación en medida, como el reconocimiento de la magnitud superficie, la elección y uso de una unidad coherente con la medida a realizar, la aplicación de una estrategia específica usual en la medición de superficies curvas o el aporte de un resultado concreto, al menos aproximado, del valor final de la medida.

Conscientes de la dificultad que supone alcanzar objetividad en la evaluación y de las limitaciones que conlleva valorar la estimación con base en el error, desde la perspectiva del modelo OMIUM proponemos, como alternativa, extender la consideración del desempeño matemático de los escolares y orientar los esfuerzos hacia la búsqueda de interpretaciones más justas, que reconozcan lo que el estudiante comprende a través de lo que es capaz de hacer con el conocimiento matemático. Sugerimos evaluar la comprensión de los estudiantes en términos de los usos pertinentes dados a los diferentes conocimientos y procesos involucrados en la estimación en medida. En los trabajos de Segovia y Castro (2009) y Segovia y De Castro (2013) hemos encontrado una referencia útil para identificar y caracterizar tales usos, que dependen de las particularidades de las situaciones de medida abordadas. En la riqueza y complejidad relativa a la estimación en medida que detallan estos trabajos, también encontramos razones para legitimar el desarrollo de propuestas de evaluación como la nuestra, centrada en los aspectos positivos de la comprensión en matemáticas.

7. Referencias

Frías, A., Gil, F. y Moreno, M. F. (2001). Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En: Castro, E. (ed.). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 477-502). Síntesis.

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 625-648. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a16

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2019). El círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas: una propuesta integradora para la evaluación en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*(1), 97-122. https://doi.org/10.12802/relime.19.2214

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, *25*(2), 5-32.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 319-336. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1158

González, M. J., Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En: Segovia, I. y Rico, L. (coords.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria* (pp. 351-373). Pirámide.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En: Flores, P. y Rico, L. (coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Pirámide.

Quintanilla, V. A. y Gallardo, J. (2021). Contribución del círculo hermenéutico de la comprensión al desarrollo de una interpretación ética en el aula de matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *35*(69), 289-313. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a14

Segovia, I. y Castro, E. (2009). La estimación en el cálculo y la medida: fundamentación curricular e investigaciones desarrolladas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, *17*(7), 499-536. http://dx.doi.org/10.25115/ejrep.v7i17.1359

Segovia, I. y De Castro, C. (2013). La estimación y el sentido de la medida. En: Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (eds.). *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 43-49). Comares.

16

Tareas de formación para favorecer el sentido de la medida en la formación inicial del profesorado

Formative tasks to promote the Measurement Sense in Prospective Teacher Education

Rafael Ramírez Uclés y Jesús Montejo-Gámez
Universidad de Granada

Resumen
Se presenta una propuesta de tareas de formación para los futuros docentes de Educación Primaria y de Secundaria y Bachillerato. Siguiendo la idea de que el profesorado ejerza de matemático para estimular el aprendizaje con significado de sus alumnos, se ha desarrollado una secuencia, de tres tareas para el Grado de Primaria y tres para el Máster de Secundaria, que fomenta el trabajo matemático del profesorado, su sentido numérico y su conocimiento de la enseñanza con relación al concepto de área, superando los saltos en la conceptualización que establecen los currículos de los diferentes niveles educativos.

Palabras clave: tareas formativas, formación inicial del profesorado, sentido de la medida

Abstract
A proposal of formative tasks for prospective elementary and high school teachers is presented. Following the idea that teachers should act as mathematicians in order to stimulate their students' meaningful learning, a sequence of three tasks has been developed for the elementary school teacher degree and three for the secondary school master's degree. These tasks promote teachers' mathematical learning, their numerical sense and their pedagogical content knowledge in relation to the concept of area, thus overcoming the scholar curricula leaps between the different educational levels.

Keywords: formative tasks, preservice teacher education, measurement sense

1. Introducción

Las aportaciones de Pablo Flores e Isidoro Segovia a la formación de futuros profesores[1] son referentes en las actuales propuestas docentes tanto del Grado de Primaria como en el Máster de Profesorado, especialmente en la Universidad de Granada. Sus ideas se han visto reflejadas en los manuales que sirven de guía en las asignaturas del módulo de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en el Grado en Educación Primaria y en la especialidad de Matemáticas del Máster de profesorado de Secundaria y Bachillerato (Flores y Rico, 2015; Rico y Moreno, 2016; Segovia y Rico, 2011), y también están recogidas en numerosas publicaciones sobre formación del profesorado (p. ej.: Alfaro *et al.*, 2020; Sánchez *et al.*, 2020). En este trabajo queremos ahondar en una de sus líneas de trabajo: la relevancia de dotar de significado los conceptos matemáticos escolares, especialmente con propuestas concretas para que el profesorado reflexione y profundice simultáneamente en sus conocimientos matemático y didáctico del contenido escolar.

Para resaltar esta conexión entre las matemáticas y su didáctica, nuestro punto de partida son dos trabajos en los que, junto con Enrique Castro, Pablo Flores e Isidoro Segovia abordaron la relatividad de las fórmulas de cálculo del área de figuras planas en general (Castro *et al.*, 1997) y del rectángulo en particular (Castro *et al.*, 1996). Estos artículos ejemplifican la idea de «hacer matemáticas» desde el enfoque de la didáctica de la matemática. El propio profesor es quien asume el papel de matemático para organizar ideas de demostraciones previas y producir sus propias creaciones (demostraciones, propiedades, etc.), con la intención de diseñar propuestas de tareas que faciliten la enseñanza con significado en sus estudiantes. Bajo esta perspectiva, los dos trabajos de referencia «aterrizan» la investigación en didáctica de la matemática en propuestas de actividades para trabajar en el aula. Nuestra intención en el presente capítulo es profundizar en esta idea para diseñar tareas de formación del profesorado que respondan a las recomendaciones que los profesores Flores y Segovia planteaban como líneas de trabajo a desarrollar.

1. Por cuestiones de extensión, las alusiones a profesor, maestro, alumno, etc., se consideran neutras en cuanto al género.

Consideramos que, pese al tiempo transcurrido, estas recomendaciones siguen vigentes siempre que se contextualicen dentro de los planes de estudio universitarios de formación del profesorado, los currículos de los diferentes niveles educativos y los avances en los fundamentos teóricos asociados.

En relación con los planes de estudio universitarios, desde la incorporación de las universidades españolas al Espacio Europeo de Educación Superior en 2007, la formación universitaria se centra en el desarrollo de competencias. El proyecto *Tuning Educational Structures in Europe* define *competencia* como:

> [...] una combinación dinámica de atributos, con respecto al conocimiento, su aplicación, a las actitudes y a las responsabilidades, que describen los resultados del aprendizaje de un determinado programa, o cómo los estudiantes serán capaces de desenvolverse al finalizar el proceso educativo. (González y Wagenaar, 2003, p. 280)

El enfoque competencial ha sido llevado a la enseñanza de las matemáticas por un colectivo de profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática a través de la noción de *sentido matemático* (Flores y Rico, 2015). En el contexto de la formación inicial del profesorado, se busca que el futuro profesor desarrolle su propio sentido matemático mediante la resolución de tareas es-

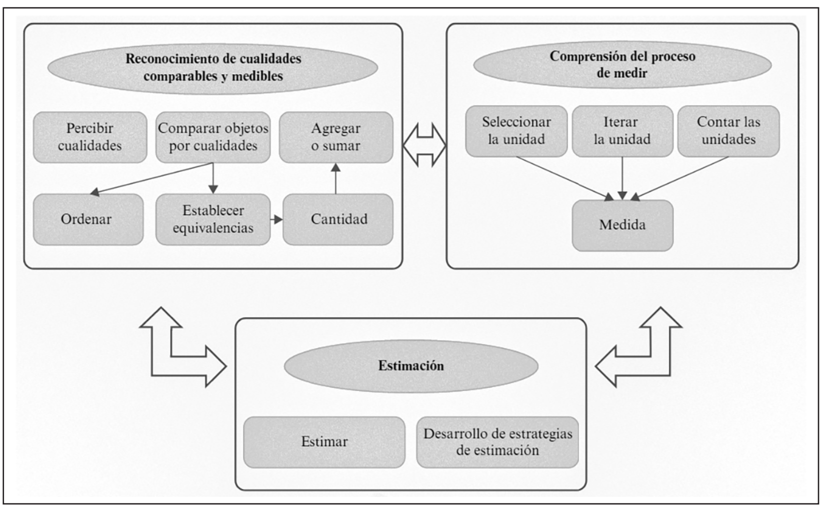


Figura 1. Componentes del sentido de la medida. Fuente: Moreno *et al.* (2015).

colares, y que este proceso de resolución potencie su competencia para analizar y diseñar tareas que favorezcan el sentido matemático de sus futuros estudiantes (Ruiz-Hidalgo *et al.*, 2019). En los últimos años se ha avanzado en la caracterización de las componentes de los sentidos correspondientes (numérico, espacial, de la medida y estocástico) y se han incorporado en las propuestas formativas de los futuros profesores (Flores y Rico, 2015).

Partiendo de los dos trabajos señalados (Castro *et al.*, 1996; 1997), focalizaremos nuestra propuesta en el sentido de la medida. En relación con este sentido matemático, Moreno *et al.* (2015, p. 151) señalaron que:

> Cuando se habla de medir una característica de un objeto son muchos los conceptos y procedimientos que hay que considerar. La comprensión de estos conocimientos que hay que promover en los escolares y de sus conexiones muestra el desarrollo del sentido de la medida.

En otras palabras, el sentido de la medida recoge las expectativas de aprendizaje involucradas en la medición de magnitudes, así como las conexiones entre dichas expectativas. Moreno *et al.* (2015) las organizaron en tres componentes (figura 1): *a*) reconocimiento de magnitudes, *b*) comprensión del proceso de medir, y *c*) estimación. Estas componentes aparecen reflejadas en distintos aspectos de los currículos actuales, donde se ha resaltado el enfoque funcional de la enseñanza de la medida, más allá de memorizar y manipular fórmulas. Siguiendo esta línea, recogemos la idea de Castro *et al.* (1996) en que planteaban: «¿Qué "otras cosas" se pueden hacer, además de saberse las fórmulas de memoria y aplicarlas en distintos casos?» (p. 1). Pretendemos que nuestra propuesta explote este planteamiento, por lo que esperamos cubrir los siguientes objetivos formativos:

- Promover que los futuros profesores de Primaria y de Secundaria «hagan matemáticas» con una intención didáctica.
- Desarrollar su sentido de la medida haciendo hincapié en el concepto de *área*.
- Potenciar la conexión entre su conocimiento de las nociones de medida con el conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas.

Para alcanzar los objetivos fijados, y de forma previa a la exposición de las tareas, el trabajo comienza con un recorrido curricular sobre los aspectos relativos a medida a través de Primaria, Secundaria y Bachillerato, poniendo el foco en el concepto de *área*.

2. Revisión del currículo sobre aspectos relativos a medida

En primer lugar, la Orden de 17 de marzo de 2015 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (2015) incluye un bloque de contenido de medidas para los tres ciclos de este nivel educativo. En los dos primeros ciclos se incide en las magnitudes longitud, masa y capacidad, además de las unidades monetarias y de tiempo. Es en el tercer ciclo cuando el currículo aborda la medición de superficies y de volúmenes con los siguientes contenidos: elección del instrumento y de la unidad adecuada a un proceso de medición, uso de las unidades del sistema métrico decimal, realización de mediciones y estrategias para hacerlo de forma exacta y aproximada, estimación de medidas, comparación de superficies por superposición, descomposición y medición, sumar y restar medidas, expresión oral del proceso de medición e interés por ser preciso en la elección de unidades y en el uso de instrumentos de medición.

En segundo lugar, la Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la comunidad autónoma de Andalucía (2021) incluye las nociones de medida principalmente en el bloque de contenidos de Geometría. En 1.º de la ESO el currículo centra su atención en el cálculo de áreas de figuras planas (usando descomposiciones en figuras simples), mientras que en 2.º de la ESO el foco está en la razón entre medidas de figuras semejantes, el cálculo de áreas asociadas a cuerpos geométricos y el cálculo de medidas en objetos del mundo físico. En 3.º de la ESO las matemáticas académicas no hacen referencia explícita a cuestiones de medida, mientras que las aplicadas reinciden el cálculo de áreas y perímetros de figuras planas y el de áreas y volúmenes de cuerpos geométricos. En 4.º de la ESO el currículo incluye la razón entre las medidas de cuerpos semejantes y en el cálculo de medidas para resolver problemas métricos del mundo físico.

En tercer lugar, la Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la comunidad autónoma de Andalucía (2021) lleva los contenidos de medida al 2.º curso del Bachillerato. Específicamente, las Matemáticas II de las modalidades de Ciencias incluyen el cálculo de áreas utilizando la integral definida (bloque de Análisis) y el cálculo de ángulos, distancias, áreas y volúmenes utilizando las operaciones con vectores (bloque de Geometría). Las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales solo hacen referencia al cálculo de área a partir de la integral definida.

En resumen, la revisión curricular evidencia dos saltos importantes en la concepción de área: de Primaria a Secundaria se salta de la iteración de la unidad al uso de fórmulas, mientras que de Secundaria a Bachillerato se salta de las fórmulas a herramientas más sofisticadas como la integral o el producto vectorial. Estos dos saltos son focos de atención en las tareas que se proponen.

3. Propuesta de tareas

Nuestra propuesta se basa en la descripción de tareas de formación (Aguayo, 2018), que incluyen una tarea matemática escolar que los futuros profesores resuelven y después analizan desde las componentes del sentido matemático, para finalmente diseñar ellos mismos una tarea de enseñanza (Ruiz-Hidalgo *et al.*, 2019). Por cuestiones de extensión, este trabajo se ciñe a la exposición de las tareas y su relación con las componentes del sentido de la medida.

Atendiendo a la revisión curricular, las tareas de formación que se plantean para los futuros maestros de Primaria enfatizan la relación entre la medida indirecta, basada en la utilización de fórmulas, con la medida directa obtenida iterando la unidad de medida seleccionada. Se espera así estimular la conexión entre el conocimiento del contenido sobre medida según la formación previa de los futuros maestros de Primaria y el conocimiento de la enseñanza que se debe alcanzar en el grado universitario de

Educación Primaria. Para los estudiantes del Máster de Profesorado de Secundaria y Bachillerato, las tareas se centran en la conexión entre los diferentes conceptos de *área* reflejadas en el currículo. Buscamos que los futuros profesores reflexionen sobre la conexión entre las concepciones de área basadas en iteración de la unidad y fórmulas, habituales en Primaria y Secundaria, con las nociones de *integral definida* y de *determinante*, que aparecen en el Bachillerato. Al igual que con los estudiantes del grado de Primaria, la reflexión debe potenciar el desarrollo coordinado del conocimiento sobre áreas que poseen los futuros profesores de Secundaria y Bachillerato y el conocimiento de la enseñanza que se persigue en el máster profesionalizador.

3.1. Tarea 1: elección de unidad y medición directa (Grado en Educación Primaria)

Meta de la tarea: comparar áreas y longitudes de figuras utilizando medidas directas.

Gestión: la tarea parte del desafío de encontrar, sin utilizar fórmulas, dos figuras distintas del tangram que tengan igual área y perímetro.

Para responder a esa cuestión, se comienza preguntando: «¿Qué figuras tienen la misma área?», «¿Cuánto miden esas áreas utilizando como unidad de medida el área del triángulo más pequeño?». Esto permite identificar que el triángulo pequeño es la figura con menor área (A), que el cuadrado, el triángulo mediano y el paralelogramo tienen área $2A$, y que el triángulo grande tiene área $4A$.

A continuación, se aborda la comparación de los lados de las figuras para lo que se plantea la siguiente cuestión: «¿Existe un lado de alguna de las figuras que permita «medir» todos los lados?». Se espera que el uso del teorema de Pitágoras (medida indirecta) para el cálculo de la raíz de 2 aparezca como indispensable, y se busca mostrar que no es necesario. Para ello, se les pide que construyan los cuadrados de la figura 2a, se ilustra que cada cuadrado tiene justo la mitad de área que el cuadrado inmediatamente más grande y se muestra cómo esta relación permite conocer longitudes de las hipotenusas de los triángulos a partir de sus lados.

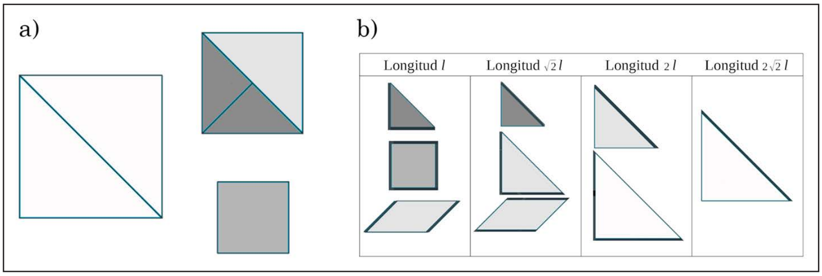


Figura 2. *a*) Construcción propuesta para estudiar la relación entre los lados; *b*) tabla de longitudes.

Esto lleva a orientarlos a que utilicen como unidad de longitud el cateto del triángulo pequeño para medir los lados del resto de las figuras, completando así la tabla que se muestra en la figura 2b. Esta tabla y los resultados obtenidos sobre las áreas conduce a concluir que el paralelogramo y el triángulo mediano son las figuras con la misma área ($2A$) y el mismo perímetro ($2l + 2\sqrt{2}l$). Una vez que se realiza la puesta en común de las soluciones propuestas en la tarea escolar, se les plantean tareas de análisis y diseño propio de actividades para los niños de Educación Primaria.

En relación con las componentes del sentido de la medida, se resalta la conexión entre las capacidades relativas al reconocimiento de cualidades comparables y medibles y el proceso de medir. Respecto a la primera capacidad, la tarea promueve que los futuros maestros perciban que las magnitudes área y perímetro pueden ser comparadas y medidas independientemente una de la otra. En cuanto a la comprensión del proceso de medir, se enfatiza que la elección de la unidad de medida requiere poder determinar la relación de la cantidad a medir respecto a dicha unidad.

Para fortalecer la conexión de estas componentes, se plantea una nueva reflexión que parte de las longitudes encontradas, en particular de que el lado del cuadrado «cabe raíz de dos veces» en la hipotenusa del triángulo pequeño. Si entendemos ese número de veces que cabe como el número de veces que hay que iterar el lado del cuadrado para medir la hipotenusa, llegamos a un conflicto de inconmensurabilidad: dado que un número irracional no se puede expresar como cociente de enteros, «contar la unidad» supondría un proceso infinito. Por ejemplo, medir una longitud de raíz de 2 metros supondría contar un metro, luego 4 decímetros, luego 1 centímetro, etc.

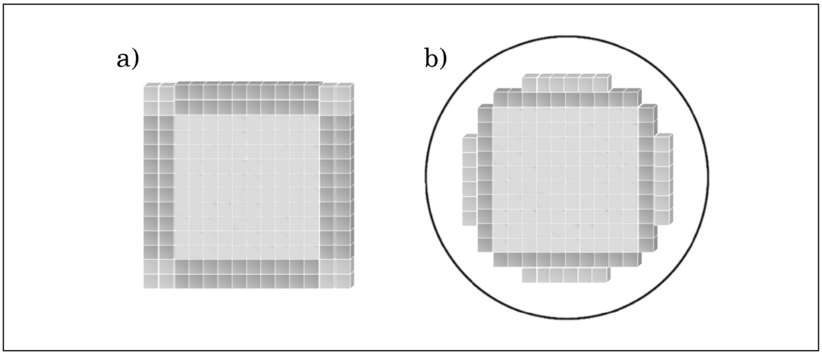


Figura 3. Usos de bloques multibase en la presente propuesta: *a*) Representación del cuadrado de lado $\sqrt{2}$ *l* (aproximando $\sqrt{2}$ por 1,4) en la tarea 1; *b*) Estrategia de estimación del área del círculo para la tarea 3.

Aprovechando esta aproximación, se les pregunta a los futuros maestros la relación entre «1,4 al cuadrado» con «el área de un cuadrado de lado 1,4». Para ello, se parte de la construcción que se muestra en la figura 3a, donde se toma el lado de la placa 10×10 (en el centro de la figura) como unidad de longitud l y se representa «1,4 al cuadrado» o «un cuadrado de lado 1,4». El conteo apropiado de las áreas de la figura 3a pone de manifiesto que la longitud 1 + 0,4 «al cuadrado» es igual al área de 1 (placa central) + 0,16 (cuadrados de las esquinas) + 0,80 (área de las barras), que es igual a 1,96.

3.2. Tarea 2: obtención de fórmulas desde la medición directa (Grado en Educación Primaria)

Meta de la tarea: relacionar las fórmulas de áreas conocidas con el proceso de medida directa.

Gestión: la tarea comienza preguntando a los futuros maestros «cuántas veces cabe la unidad de área» en diferentes figuras: *a*) un rectángulo de dimensiones 2×3, *b*) un rectángulo de dimensiones (1/2)x(1/3), *c*) un rectángulo de dimensiones lx$\sqrt{2}$, y *d*) un cuadrado de lado $\sqrt{2}$. La revisión de los procedimientos seguidos invita a la cuestión principal: «¿Qué relación existe entre el área del rectángulo como "base por altura" con el conteo de unidades de medida?»

Tabla 1. Figuras planas dadas, magnitudes que determinan las fórmulas de sus áreas y relaciones esperadas.

Figura	**Magnitudes**	**Relación**
Rombo	Diagonales	El rombo cabe 2 veces en el rectángulo formado por las diagonales
Triángulo	Base y altura	El triángulo cabe 2 veces en el rectángulo formado por la base y la altura
Trapecio	Suma de las bases y la altura	El paralelogramo cabe una vez en el rectángulo formado por la base y la altura
Círculo	Cuadrado de radio el lado	El cuadrado cabe π veces en el área del círculo

Para responder a esas preguntas, se pide a los futuros maestros que busquen «cuántas veces caben» diferentes figuras planas dentro del rectángulo determinado por las longitudes que determinan la fórmula usual de su área, para, así, completar la tabla 1.

Tabla 2. Figuras propuestas como unidades de medida y subdivisiones sugeridas.

Figura	**Subdivisiones**
Cuadrado	Cuadrados, rectángulos, triángulos rectángulos.
Triángulo equilátero	Triángulos equiláteros, triángulos rectángulos
Triángulo rectángulo e isósceles	Triángulos semejantes
Hexágono regular	Hexágonos, triángulos equiláteros
Rectángulo (doble cuadrado)	Rectángulos semejantes, cuadrados
Paralelogramos	Paralelogramos semejantes

La comprensión del proceso de medir iterando y contando la unidad lleva asociado un problema de «relleno» de la superficie de la figura a medir con la unidad de medida seleccionada. En este sentido, la unidad de medida puede valorarse según la facilidad con la que iteraciones (o subdivisiones) de ella misma «rellenen» el resto de las figuras. Aparece así el problema del relleno del plano y la relación con la aproximación y estimación. Se plantea a los futuros maestros que valoren las cualidades como unidad de área de las figuras que se muestran en la tabla 2, atendiendo al relleno del espacio por ellos mismos y sus subdivisiones, y que establezcan relaciones entre ellas. La medición directa de una figura descomponiéndola en unidades de medida y sus divisiones puede resultar un proceso complejo e infinito en algunos casos. Para abordarlo en relación con la aproximación y la estimación, se plantea la tercera tarea de la propuesta.

3.3. Tarea 3: estimación de Pi a través de medición directa (Grado en Educación Primaria)

Meta de la tarea: estimar y aproximar el área del círculo utilizando bloques multibase.

Gestión: la tarea comienza pidiéndoles a los futuros maestros que construyan un círculo de radio igual al lado del cuadrado grande de los bloques multibase. La pregunta de partida es la siguiente: «¿Cuántas veces crees que cabe el cuadrado en dicho círculo? ¿Por qué?» Con ellas, se pretende estimular las estrategias de estimación, como cubrir el círculo con cuatro placas o insertar en su interior bloques de diferentes tipos para ir dando aproximaciones por defecto (figura 3*b* arriba).

A continuación, se cuestiona qué ocurre cuando en un problema se decide «quedarse con dos decimales» para relacionar el área del círculo y del cuadrado. Usando los bloques multibase y asumiendo como unidad de área la placa (P), tenemos que la barra tiene de área 0,1 P, mientras que los cubitos tienen área 0,01 P. Por tanto, redondear el cálculo del área con dos decimales utilizando la placa como unidad de área es equivalente a rellenar el círculo utilizando cubitos. Así la fórmula del área del círculo se interpretaría como «el cuadrado de lado el radio cabe 3,14 veces en el círculo», es decir, aproximadamente 314 cubitos rellenarían el círculo.

3.4. Tarea 4: derivación del teorema fundamental del cálculo desde la medición directa de polígonos (Máster de Profesorado)

Meta de la tarea: inducir el teorema fundamental del cálculo para funciones afines calculando áreas mediante iteración de la unidad.

Gestión: la tarea comienza calculando las áreas de polígonos vinculados a funciones afines, siguiendo la secuencia *a*)-*d*) que se muestra en la figura 4. En una primera etapa se toman los polígonos concretos de la figura y las áreas deben obtenerse sin más que contabilizar cuadrados o fracciones de cuadrado. En una segunda etapa se pide a los futuros profesores que induzcan fórmulas, una para cada función, que proporcionen el área del polígono cuyo lado apoyado en el eje tiene una longitud indeterminada x. En este momento no se dan pautas sobre cómo hacerlo, pero se espera que algunos futuros profesores generalicen los resultados obtenidos previamente y otros aprovechen las fórmulas escolares para encontrar las expresiones algebraicas *a*) $3x$, *b*) $9x/2$, *c*) $x^2/4$ y *d*) $x^2/2 + x$. A continuación, se invita a «derivar las áreas» e identificar en cada caso las derivadas obtenidas como las ecuaciones de las rectas que determinan las figuras. Se espera, así, que emerja la idea intuitiva de que «la función es la derivada del área bajo la función», que invita a la discusión sobre el teorema fundamental del cálculo y cómo este resultado aporta razón de ser a la búsqueda de primitivas de funciones (cálculo de áreas).

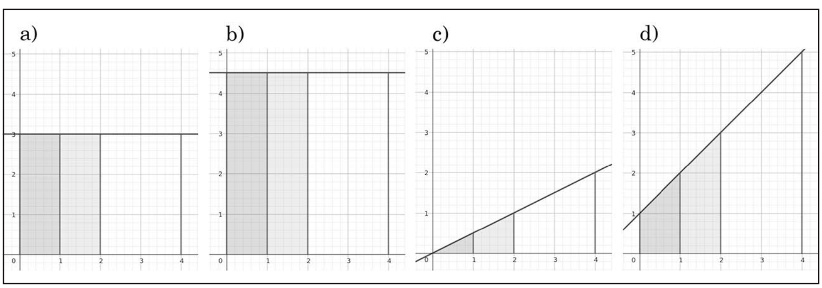


Figura 4. Polígonos cuya área se propone calcular al inicio de la tarea 4. Las ecuaciones de las rectas asociadas son: *a*) $y = 3$, *b*) $y = 9x/2$, c) $y = x/2$, *d*) $y = x + 1$.

La tarea continúa solicitando a los futuros profesores una versión propia del teorema fundamental del cálculo para funciones afines. Para ello, se les pide que revisen el proceso de obtención de expresiones algebraicas ya hecho, pero esta vez utilizando obligatoriamente las fórmulas escolares habituales. Así, se espera que identifiquen las ecuaciones de las rectas como las alturas de los polígonos si la longitud de la base es x y que, a partir de esta identificación, proporcionen la expresión $mx^2/2 + nx$ para el área bajo una recta genérica (siendo m y n la pendiente y ordenada en el origen de la recta, respectivamente). Una vez obtenida esta fórmula, se elabora en gran grupo un enunciado del teorema que refuerce el significado encontrado al cálculo de primitivas. Se discuten entonces las conexiones entre el resultado formulado y la regla de Barrow, incidiendo en cómo se ha llegado a ideas matemáticas sofisticadas (primitiva de una función) a partir de otras más sencillas (iteración de unidad y fórmulas) y enfatizando que esta conexión podría aprovecharse para la enseñanza del cálculo integral. La tarea finaliza solicitando a los futuros profesores actividades de diseño propio para alumnos de Bachillerato con este fin.

3.5. Tarea 5: obtención de fórmulas para áreas de figuras planas usando cálculo integral (Máster de Profesorado)

Meta de la tarea: obtener fórmulas usuales de áreas de figuras planas usando cálculo integral.

Gestión: se comienza recordando la conexión entre obtención de primitivas y el cálculo de áreas desarrollado en la tarea 4. Se plantea entonces si las fórmulas de cálculo de áreas usuales se pueden obtener a través del cálculo integral. Para responder a esta cuestión, se reincide en la relación entre la expresión $mx^2/2 + nx$, obtenida anteriormente, y las fórmulas usuales. Se espera, así, que asocien la situación $m = 0$ con un rectángulo de base x y altura n, y la situación $n = 0$ con un triángulo de base x y altura mx. Esta reflexión pone de manifiesto la importancia de ubicar adecuadamente la figura de referencia e identificar las longitudes relevantes para el cálculo del área cuando se busca obtener una fórmula a partir del cálculo integral.

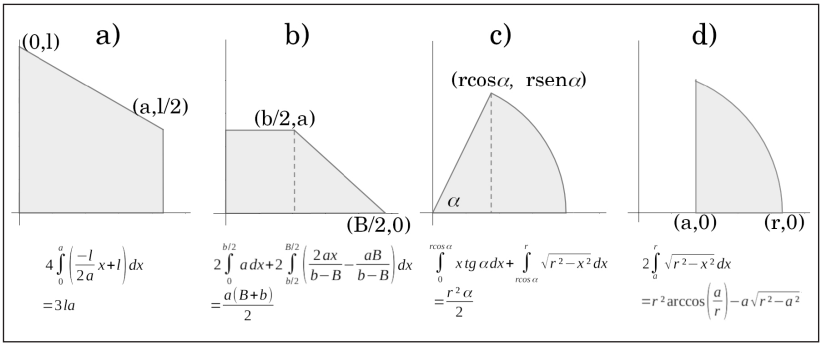


Figura 5. Planteamiento esperado para el cálculo de las áreas de la tarea 5, expresiones integrales asociadas a las áreas de las figuras completas y fórmulas resultantes.

A continuación, se proponen diferentes figuras planas y se invita a los futuros profesores a que adapten las ideas discutidas a diferentes casos particulares. El primero de ellos es un hexágono regular, sobre el que se busca identificar la ubicación óptima de la figura, su apotema (*a*) y su lado (*l*, en lugar de su perímetro) como se ilustra en la figura 5*a*. En este caso es necesario obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos (0, l) y (*a*, l) y escribir la integral definida entre 0 y *a* correspondiente, cuyo resultado multiplicado por cuatro proporciona una expresión equivalente a la fórmula clásica (figura 5a). La segunda figura que se propone es un trapecio isósceles, sobre el que se plantea la pertinencia de aprovechar el planteamiento de la tarea 4 o, por el contrario, ubicar la mitad de la figura según se dispone en la figura 5b. Se promueve esta segunda alternativa para ilustrar la integración de funciones a trozos, cuya expresión para este caso conduce a la fórmula escolar usual. El tercer caso que se aborda es el área de un sector circular (figura 5c), que conduce a situar el centro del círculo en el origen de coordenadas y dar una expresión de la circunferencia de radio r en la que la coordenada y se escriba como función de *x*. De nuevo, el área queda descrita por dos integrales indefinidas, cuya resolución implica la fórmula habitual. Finalmente, se propone la obtención del área de un segmento circular, que se plantea como muestra la figura 5d, pero cuya resolución presenta una demanda técnica más alta y se deja como problema abierto (quede también como ejercicio para el lector interesado). La tarea 5 se cierra discutiendo el interés de obtener las fórmulas conocidas para los estudiantes de Secundaria y Bachillerato y la pertinencia de que el profesorado establezca puentes entre el conocimiento escolar sobre área que es habitual en Secundaria y las herramientas novedosas que se presentan en el Bachillerato. Finalmente, se solicita a los futuros profesores actividades de aprendizaje basadas en estas ideas.

3.6. Tarea 6: conexión entre concepto de *área* y cálculo de determinantes (Máster de Profesorado)

Meta de la tarea: mostrar que el área de un paralelogramo plano «es» un determinante 2×2.

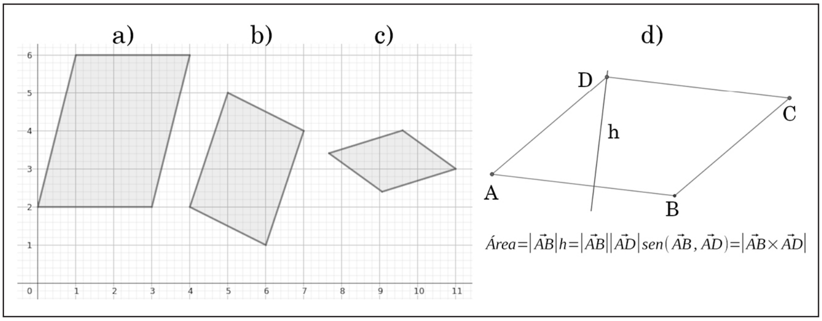


Figura 6. Secuencia de figuras propuestas para iniciar la tarea 6 (*a*, *b* y *c*). Expresión del área de un paralelogramo usando trigonometría y su conexión con el producto vectorial en el espacio (*d*).

Gestión: la tarea parte del problema de calcular el área de un paralelogramo en el plano conociendo las posiciones de sus vértices (en lugar de longitudes asociadas a la figura). Para ello, se comienza proponiendo a los futuros profesores los casos particulares sobre retículas que se muestran en la figura 6. En *a*) y *b*) se esperan estrategias basadas en la iteración de la unidad, pero el caso *c*) evidencia las limitaciones de estas para el caso general. A continuación, se pide relacionar el problema planteado con el producto de la base por la altura, lo que se espera que desemboque en la fórmula «trigonométrica» mostrada en las dos primeras igualdades de la figura 6*d*, o incluso a estrategias basadas en la distancia de un punto a una recta. Ambas ideas se reconocerán como válidas, pero se demanda un procedimiento de cálculo más sencillo. Para ello, se pregunta a qué recuerda la fórmula «trigonométrica», en busca de que emerja la idea de usar el producto vectorial. En ese momento, se hace un inciso donde se recuerda la definición de producto vectorial de dos vectores u y v en el espacio (vector de módulo $|u||v|sen\left(\widehat{u,v}\right)$ y perpendicular a u y v) y se discute en gran grupo cómo se calculan las coordenadas de ese vector conocidas las de u y v, lo que lleva a la expresión usual para paralelogramos en el espacio, que involucra el cálculo de determinantes.

De vuelta al problema de partida, se recuerda la interpretación geométrica del producto vectorial como área de figuras en el espacio y se pregunta a los futuros profesores si se podría aprovechar esta idea para paralelogramos en el plano. Se espera que salgan a relucir dos obstáculos: el carácter tridimensional del producto vectorial y su aparente complejidad, que no simplifica los métodos ya discutidos. Ante estos obstáculos, se pide abordar el primero respondiendo a la siguiente pregunta: «¿se puede adaptar el producto vectorial a problemas en el plano?» Se espera que se plantee la interpretación del plano como parte del espacio (mediante la identificación del punto $A(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$ como $\hat{A}(x,y,0)$ de $\mathbb{R}^3$) como posible solución. Esta idea supone introducir ceros en los cálculos, lo que plantea la duda razonable sobre si aplicarla simplifica la fórmula del producto vectorial usual. Se invita a los futuros profesores a que comprueben qué ocurre, lo que los lleva a que el área del paralelogramo de vértices A, B, C y D es igual a $det(AB, CD)$. Se propone la validación de la fórmula usando los ejemplos trabajados previamente, se incide en la sencillez de la misma y se discute la pertinencia de usar esta fórmula en niveles inferiores a Bachillerato y, en general, de trabajar contenidos escolares cuyo origen no está al alcance de los estudiantes.

Finalmente, se discute que el volumen de un paralelepípedo está asociado a un determinante 3×3 formado por los vectores de sus aristas y se les pide que interpreten geométricamente las propiedades de los determinantes en función de esta asociación volumen-determinante. Por ejemplo, la propiedad de multiplicar todas las filas del determinante por 2 se interpreta geométricamente como calcular el volumen de un paralelepípedo en el que se han duplicado todos sus lados y, por tanto, el volumen se ha multiplicado por 8. La tarea concluye pidiendo a los futuros profesores que diseñen tareas para explotar la conexión área-determinante y volumen-determinante.

4. Conclusiones

Este capítulo presenta un conjunto de tareas de formación para futuros profesores de Primaria y Secundaria con el triple propósito de que estos hagan trabajo matemático con intenciones didácticas, desarrollen su sentido de la medida y adquieran conocimiento para la enseñanza en el proceso.

Respecto al trabajo matemático con intención didáctica, la propuesta recoge la idea de que el profesor asuma el papel de matemático para crear conocimiento matemático y estimular el de su alumnado. En este sentido, la pregunta «¿qué otras cosas se pueden hacer cuando se trabaja la medida?», planteada por Castro *et al.* (2016), se responde mediante tareas que estimulan la indagación autónoma, la exploración de casos particulares y la generalización, la obtención de fórmulas conocidas y otras no conocidas mediante la conexión entre diferentes concepciones de área, la generación autónoma de preguntas y discusión sobre sus posibles respuestas e incluso la formulación de resultados matemáticos propios.

En cuanto a las componentes del sentido de la medida de los futuros profesores (Moreno *et al.*, 2015), las tareas de formación descritas promueven la identificación y diferenciación de magnitudes, la aproximación y la estimación, y la obtención de resultados de mediciones a partir de diferentes concepciones de área: desde iteración directa de la unidad hasta el cálculo integral y el uso de determinantes, pasando por las fórmulas escolares usuales.

En relación con la conexión entre conocimiento del contenido y conocimiento para la enseñanza, la propuesta busca enfocar la formación del profesorado desde el ejemplo que sirva de estímulo al profesorado en formación para fomentar el aprendizaje con sentido de las matemáticas. En particular, se proporcionan ideas para superar los saltos en la conceptualización de área que plantean los currículos escolares, se fomenta la reflexión sobre la pertinencia de ciertos contenidos y estrategias vinculados al área y se hace hincapié en la importancia de formular adecuadamente una situación matemática para favorecer la comprensión de las ideas involucradas.

5. Referencias

Aguayo, C. G. (2018). *El análisis didáctico en la formación inicial de maestros de primaria*. [tesis doctoral no publicada]. Universidad de Granada.

Alfaro, C., Flores, P. y Valverde, G. (2020). Conocimiento especializado de profesores de matemática en formación inicial sobre aspectos lógicos y sintácticos de la demostración. *PNA 14*(2), 85-117.

Castro, E., Flores, P. y Segovia, I. (1997). Relatividad de las fórmulas de cálculo de la superficie de figuras planas. *SUMA 26*, 23-32.

Castro, E., Segovia, I., Flores, P. (1996). El área del rectángulo. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas, 10*, 63-78.

Flores, P. y Rico, L. (coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria.* Pirámide.

González, J. y Wagenaar, R. (coords.) (2003). *Tuning Educational Structures in Europe. Informe Final, fase Uno.* Universidad de Deusto.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En: Flores, P. y Rico, L. (coords). *Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Pirámide.

Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Bachillerato en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado (2021). *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 7*, de 18 de enero de 2021, 224 a 655. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2021/507/BOJA21-507-01024.pdf

Orden de 15 de enero de 2021, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la etapa de Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad, se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado y se determina el proceso de tránsito entre distintas etapas educativas (2021). *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 7*, de 18 de enero de 2021, 656 a 1024. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2021/507/BOJA21-507-01024.pdf

Orden de 17 de marzo de 2015 por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía (2015). *Boletín Oficial de la Junta de Andalucía, 60*, de 27 de marzo de 2015, 9 696. https://www.juntadeandalucia.es/boja/2015/60/BOJA15-060-00831.pdf

Rico, L. y Moreno, A. (coords.) (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria.* Pirámide.

Ruiz-Hidalgo, J. F., Flores, P., Ramírez-Uclés, R., Fernández-Plaza, J. A. (2019). Tareas que desarrollan el sentido matemático en la formación inicial de profesores. *Educación Matemática, 31*(1), 121-143. https://doi.org/10.24844/em3101.05

Sánchez, J., Segovia, I., Miñán, A. (2020). Anxiety and Self-Confidence toward Mathematics in Preservice Primary Education Teachers. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 18*(51), 127-152.

Segovia, I. y Rico, L. (coords.) (2011). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Pirámide.

17

Aportes teóricos a la formación de profesores desde tesis doctorales y su desarrollo en la educación matemática en Chile

Theoretical contributions to teacher training from doctoral theses and their impact on mathematics education in Chile

Elisabeth Ramos-Rodríguez,[1] Nielka Rojas González,[2]
Macarena Valenzuela Molina[3] y María Victoria Martínez Videla[4]
[1]Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, [2]Universidad Católica del Norte,
[3]Universidad Alberto Hurtado, [4]Universidad de O´Higgins

Resumen
La formación de profesores es una línea de investigación ampliamente trabajada en educación matemática. En ella se puede encontrar una diversidad de enfoques que permiten profundizar en el desarrollo y conocimiento del profesor, para comprender los procesos implicados en esta profesión. Este capítulo muestra los alcances en esta línea, a partir de los aportes teóricos de tesis doctorales dirigidas por el profesor Pablo Flores, centradas en la reflexión y el conocimiento del profesor. Además, se ilustra cómo estos avances teóricos han traspasado fronteras contribuyendo en la formación docente y a la investigación en educación matemática en Chile.

Palabras clave: conocimiento del profesor, reflexión docente, formación de profesores, educación matemática

Abstract
Teacher training is a widely worked line of research in Mathematics Education. In it you can find a diversity of approaches that allow deepening the development and knowledge of the teacher, in order to understand the processes involved in this profession. This chapter shows the achievements in this line, based on the theoretical contributions of doctoral theses directed by Professor

Pablo Flores, focused on the reflection and knowledge of the professor. In addition, it illustrates how these theoretical advances have crossed borders, contributing to teacher training and research in Mathematics Education in Chile.

Keywords: teacher knowledge, teacher reflection, teacher training, mathematics education

1. Introducción

La formación docente es una temática que ocupa un lugar importante en el desarrollo investigativo dentro del ámbito de la Educación, como también en el desarrollo de políticas públicas que buscan mejorar la formación inicial docente y las oportunidades de desarrollo profesional. En Chile, el Ministerio de Educación ha desarrollado desde hace más de una década el Programa de Fomento a la Calidad de la Formación Inicial de Docentes, enmarcado en la Ley 20903 que describe un marco de acción sobre elementos relativos al desarrollo profesional y la carrera docente, considerando ciertas obligatoriedades para las instituciones formadoras de profesores. Asimismo, se fijan Estándares Orientadores para la Formación Inicial Docente que refieren al núcleo esencial de conocimientos disciplinarios y pedagógicos con que se espera desarrollen los profesionales de la educación al finalizar formación inicial (MINEDUC, 2012).

Estas orientaciones se vinculan con el desarrollo investigativo en el ámbito de la educación matemática, a partir de un consenso respecto de la importancia de reflexionar e investigar sobre los procesos de formación inicial y la formación continua, debido a que la riqueza y solidez de la formación de los profesores es un elemento clave para el logro del aprendizaje de los estudiantes (Darling-Hammond, 2000; Darling-Hammond *et al.*, 2009).

Es así como las temáticas de conocimiento de profesor y desarrollo profesional constituyen dos relevantes núcleos de trabajo en la investigación en educación matemática. La primera busca indagar en los diversos procesos involucrados en el desarrollo profesional de los docentes, entre ellos, el proceso de reflexión, la forma de operar o diseñar los programas de desarrollo profesional y la instalación de prácticas en los centros educativos, entre otros. En el segundo núcleo mencionado, podemos comprender el conocimiento como sustento del desarrollo profesional; es decir, lo que facilita y constituye un elemento que enriquece el conocimiento profesional docente (Climent *et al.*, 2014), pero también cómo se puede desarrollar desde la formación inicial de un profesor.

Ambas temáticas están altamente relacionadas entre sí y, en algunos casos, es imperceptible su delimitación. Por ejemplo, al estudiar un programa de desarrollo profesional docente podemos centrarnos en analizar la transformación de conocimiento que experimenta un docente al participar en él, comprender qué contenidos matemático enseña, para qué y cómo lo enseña, analizar la instrucción del profesor, las estrategias de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la comunicación de la disciplina y la organización del currículo, entre otros aspectos. Es así como el desarrollo profesional docente y el conocimiento del profesor cobran relevancia al comprender, implementar e investigar el quehacer docente, tanto en la formación inicial como continua.

Los alcances de ambas líneas son amplios y, dentro de ellos, es de interés preocuparse por el papel que juegan algunos estudios en beneficio del desarrollo de la educación matemática. Este trabajo tiene por objetivo presentar los aportes teóricos de tesis doctorales centradas en la reflexión y el conocimiento del profesor, bajo la dirección del profesor Pablo Flores, como miembro del grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, a quien se le reconoce en esta obra, y cómo estos avances teóricos se implementan en Chile.

A continuación, se contextualiza el papel que juegan tres constructos presentes en las tesis doctorales: análisis didáctico, conocimiento del profesor y reflexión. Posteriormente, se desarrollan las ideas teóricas de las tesis, enfatizando los aportes que nacen de la reflexión del trabajo conjunto con el profesor Pablo Flores y cómo estos trabajos se han seguido desarrollando en Chile.

2. Relación entre MTSK, análisis didáctico y reflexión

Como se ha mencionado, las tesis que guían este trabajo centran su atención en la reflexión y en el conocimiento (desde el modelo MTSK) del profesor. En ellas está presente el *análisis didáctico* (AD) desde tres enfoques, lo cual se ilustra en la figura 1, que contribuye a la articulación de estos constructos. Al observar desde la izquierda la figura 1, se visualizan dos agentes utilitarios que se manifiestan en torno al AD, el profesor y el investigador en formación de profesores. En relación con el profesor, al llevar a cabo el Estudio de Clases, puede considerar el AD para profundizar en el contenido, lo que hace emerger el primer enfoque de este: *formativo-metodológico*. Por otra parte, el segundo agente utilitario del AD, el investigador en formación de profesores, puede profundizar en aspectos matemáticos y de la enseñanza de los fenómenos estudiados para abordar una investigación en esta área, lo que hace surgir al *enfoque comprensivo* del AD. Por último, este segundo agente utilitario puede emplearse para identificar indicadores del conocimiento del profesor o bien para analizar la reflexión de los profesores, entre otros estudios en torno a

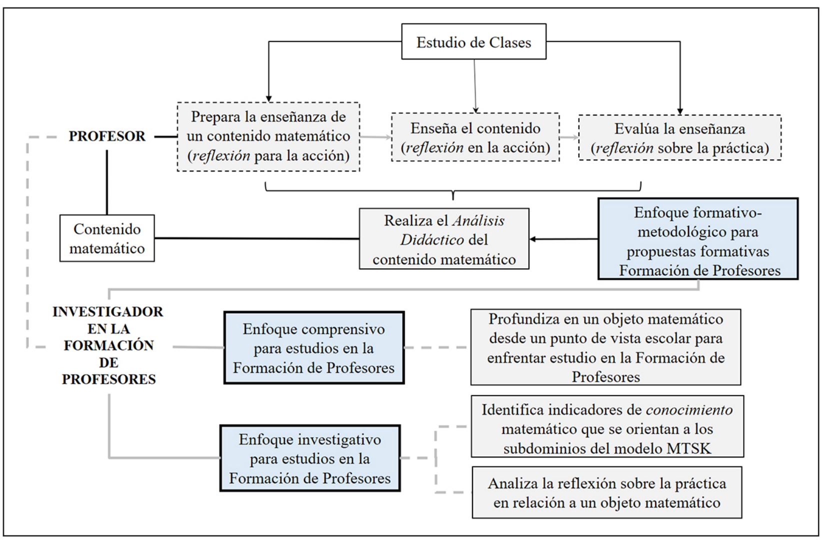


Figura 1. Enfoques del AD en la Investigación en Formación de profesores.

la formación de profesores. Esto hace emerger el tercer enfoque del AD, denominado *investigativo*. En síntesis, se tiene que:

a) Un enfoque formativo-metodológico para la formación de profesores, que los lleva a enfrentarse a la tarea de realizar el AD para el diseño, implementación y evaluación de experiencias de aprendizaje dentro un programa formativo, objetos de estudios.
b) Un enfoque comprensivo, en que el AD se considera una herramienta que permite al investigador profundizar en el contenido matemático escolar imbricado en su estudio, desde el ámbito matemático y de la enseñanza.
c) Un enfoque investigativo, en que el AD se contempla como herramienta que permite al investigador disponer de un referente amplio para identificar indicadores del conocimiento especializado del profesor de matemáticas que puedan servir para comprenderlo, o bien para analizar la reflexión sobre la práctica de profesores en relación con un objeto matemático.

Estos tres enfoques y su relación con la función que cumplen en el contexto de la formación docente pueden orientar el estudio del conocimiento del profesor de matemática y su desarrollo profesional, ya sea en un ámbito de investigación como a nivel de formación, elaborando cursos, diseñando programas de estudios, planificando contenidos, entre otros, de acuerdo con los trabajos presentados.

Cabe destacar que el AD es posible vincularlo con la metodología de Estudio de Clases y con los procesos reflexivos en la formación de profesores. En los apartados siguientes se presentan estudios en relación con los enfoques descritos, desde distintas perspectivas estudiadas en tesis doctorales.

3. Desarrollo profesional del profesor de matemáticas

El trabajo doctoral realizado por Ramos-Rodríguez (2014) se centra en estudiar la reflexión de profesores de matemáticas sobre la modelación matemática, al participar en un programa de desarrollo profesional. En este estudio se relaciona la reflexión, el Estudio de Clases (EC) y el AD.

En este mismo estudio, se buscó una herramienta metodológica formativa que diera impulso a los procesos reflexivos. Es así como se utilizó el EC (*lesson study*, como es llamado en la literatura anglosajona), definido como un medio de capacitación para profesores de manera que desarrollen sus prácticas pedagógicas, basado en la investigación sobre su propia práctica (Isoda *et al.*, 2012; Ponte, 2014). El EC se considera un modelo adecuado para la formación de profesores, ya que les permite estudiar sus formas de enseñanza (Elipane, 2011) y, por tanto, se puede insertar directamente en la enseñanza para generar modelos y formas concretas de buenas prácticas, constituyéndose en un enfoque clave para compartir actividades de perfeccionamiento docente.

El EC implica un proceso cíclico compuesto de tres etapas (preparación, implementación y evaluación de la clase y revisión de resultados) en las que es particularmente importante la colaboración entre pares, la práctica, la focalización en el aprendizaje de los estudiantes (Isoda *et al.*, 2012) y la investigación sobre la propia práctica (Elliot, 2004).

A partir de esta profundización en el estudio de Ramos-Rodríguez (2014), se examinaron elementos teóricos del EC y de la reflexión para ver su complementariedad, apreciando como el EC es una buena herramienta para generar la reflexión de profesores en un curso formativo. A partir de los aportes del profesor Pablo Flores, se estableció una relación teórica a partir del modelo reflexivo de Korthagen (2010), denominado ALaCT, como medio para general la reflexión, y el EC que sitúa el contexto para trabajar con profesores analizando procesos reflexivos. La figura 2, presenta una relación entre ambos constructos EC y reflexión, a partir del modelo reflexivo ALaCT.

Como se observa en la figura 2 el modelo ALaCT (alusión a los nombre de las fases en inglés ***A**ction*, ***L**ooking back on action*, ***A**wareness of essentials aspects*, ***C**reating alternative methods of actions y **T**rial*) se refiere a un proceso compuesto de cinco fases: *a*) acción o experiencia; *b*) mirar hacia atrás en la acción; *c*) identificación de los puntos importantes en donde es relevante la intervención de un agente externo (un académico experto, un par o mediante lectura de documentos); *d*) crear, buscar y preparar comportamientos alternativos para la acción; y, por último, *e*) comprobar en una nueva situación, empezando un ciclo nuevo de reflexión, pero desde apreciaciones anteriores.

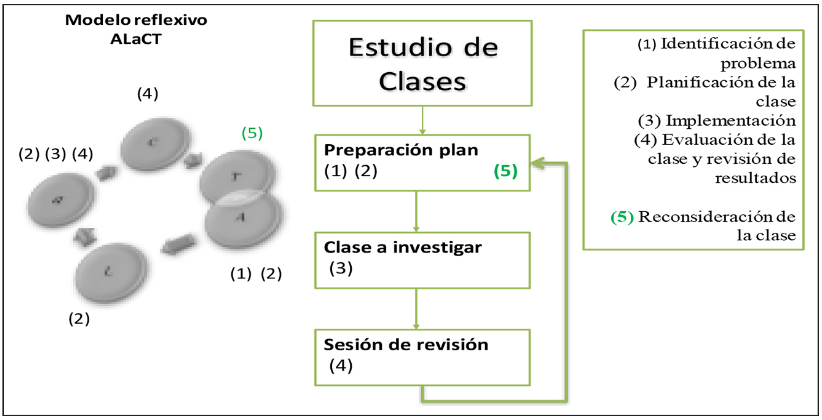


Figura 2. Articulación del EC y modelo ALaCT.

El modelo ALaCT orienta la reflexión del profesor, implicándolo en las diversas fases. Una de ellas requiere distanciamiento de la propia acción para detectar los problemas que han surgido, o bien para apreciar el posicionamiento que se adopta. Este distanciamiento (que requiere un trabajo entre pares, desde el trabajo colaborativo) es posible realizarlo mediante procesos sistemáticos como los que propone el EC, favoreciendo las fases del ciclo reflexivo, el que se incorporan nuevos elementos que sustentan las decisiones de los profesores respecto a sus clases, identificando las fases del modelo reflexivo ALaCT y las etapas de un ciclo del EC.

Fruto de este estudio, en Ramos-Rodríguez *et al.* (2017) se concluye que, si bien parece ser que el EC no es un elemento clave en toda reflexión, sí que favorece el proceso reflexivo en un curso formativo, componente que, además, vincula fácilmente teoría y práctica, confirmando los resultados de Elliot (2004) sobre EC y reflexión y en concordancia con el enfoque realista planteado por Korthagen (2011).

La experiencia formativa e investigativa que surge de la articulación teórica evidencia que el EC favorece en los docentes una mayor involucración en sus procesos de reflexión apoyando su desarrollo profesional. Observamos elementos de complementariedad entre la reflexión y el EC, que entrega herramientas para la práctica y al trabajo colaborativo de manera de incentivar el trabajo reflexivo de los profesores.

Los resultados del estudio de la articulación entre EC y reflexión que se forjó en la tesis doctoral han traspasado al contexto de la educación matemática chilena. Ambos temas son desarrollados en Chile en la formación inicial y continua, impulsando el constructo reflexión, de manera sistemática y operativa, tema que el Ministerio de Educación de Chile impulsa en la formación docente, para hacer un camino que favorezca la innovación dentro de las instituciones escolares y de las aulas.

Evidencia de ello, se puede ver en diversas instancias formativas llevadas a cabo en este país. Desde el año 2015, se implementan en Chile diversas capacitaciones a profesores con foco el desarrollo de capacidades reflexivas, como el curso «Didáctica del álgebra, teoría y práctica desde la reflexión docente». Destacamos uno, realizado desde el año 2016, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV). Se trata de un Diplomado en Didáctica de la Estadística y las Probabilidades, cuyo objetivo es promover en los docentes participantes procesos reflexivos mediante el EC. También, en la misma casa de estudio, en el año 2021 se realizó un programa de desarrollo profesional para profesores de colegios vulnerables cuyo objetivo fue llevar a cabo ciclos de EC que involucraran la reflexión del desarrollo de habilidades matemáticas en alumnos de Primaria. Por último, resaltamos que, a contar del año 2020, en la malla curricular del Programa de Magister en Didáctica de la Matemática de la PUCV, se han incluido elementos de la reflexión sistemática del profesor, brindando espacios para que el profesorado conozca este constructo y los implemente en su quehacer profesional.

Estos resultados, además de impactar en los lineamientos de programas de desarrollo profesional, han tenido repercusión en el ámbito investigativo y en la emergencia de estudios chilenos que van en esta línea. Destacamos el trabajo de Corrial (2016), donde se caracteriza el conocimiento didáctico del contenido sobre ecuaciones lineales de un profesor novel de matemáticas que participa de un curso de acompañamiento que promueve procesos reflexivos.

4. Análisis didáctico

En la línea del conocimiento del profesor de matemáticas, se ha buscado comprender el conocimiento matemático implicado en la práctica, surgiendo la necesidad de diseñar herramientas para hacer operativo un proceso que permita identificar el conocimiento y profundizar en su caracterización. Por lo cual, a partir de la reflexión instada por Pablo Flores en su dirección de la tesis doctoral de Rojas (2014) y luego de Valenzuela-Molina (2021), hemos profundizado en la articulación del AD y el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK).

A partir de los estudios realizados por Rico (1997a; 1997b), sobre el análisis curricular que articula cuatro dimensiones: cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social, se comienza a interpretar las bases del AD. El AD se define como herramienta para facilitar al profesor el diseño de unidades didácticas, siendo un recurso que permite organizar la actividad de enseñanza referente a contenidos matemáticos (Gómez, 2007).

El estudio del conocimiento del profesor de matemática o del profesor que enseña matemática ha tenido una gran relevancia en los aportes de la didáctica de la matemática, lo cual se evidencia en los diversos *Handbook de Educación* de profesores de matemática (Gutiérrez *et al.*, 2016; Lester, 2007; Tirosh y Wood, 2008) y en estudios de distintos formadores de maestros, matemáticos y didactas que se han preocupado por la formación inicial y continua de profesores.

El conocimiento que los profesores deben ir transformando, desde su formación inicial y de manera continua, tiene su origen en la interacción con el contenido matemático, en las experiencias de enseñanza y aprendizaje, en la reflexión crítica y constante sobre su práctica. Esto le permite tomar decisiones respecto del diseño, implementación y evaluación de experiencias de aprendizaje, ya que conlleva un conocimiento global, que le permite gestionar la enseñanza, desarrollar estrategias, incorporar los estilos de aprendizaje de sus alumnos, y resolver imprevistos durante sus clases. Esta visión más amplia del conocimiento de un profesor trasciende a la del profesor que solo transmite conocimiento, ya que va construyendo su conocimiento a partir de su experiencia como estudiante, de su experiencia como docente y de la reflexión constante que necesariamente produce cambios específicos en su práctica, dando al conocimiento del profesor un carácter especializado del saber matemático (Carrillo *et al.*, 2018).

Por tanto, dado que el AD permite profundizar en un contenido matemático y planificar en función de los elementos que el proceso de enseñanza y aprendizaje demanda, consideramos que es un procedimiento ideal de cómo el profesor diseña, lleva a la práctica y evalúa las actividades de enseñanza y aprendizaje. Desde la visión de un investigador permite describir la ruta de conocimiento que se exterioriza para preparar la enseñanza, analizando la transformación del conocimiento profesional, sobre los diversos elementos disciplinares y didácticos.

Fruto de la experiencia en investigación y de la articulación teórica, en relación con la utilización del AD como una herramienta formativa se han desarrollado trabajos conjuntos entre investigadores para fortalecer la formación docente. Es así como la experiencia obtenida en las tesis citadas, en relación con la utilización del AD como una herramienta formativa para y en la formación inicial (Valenzuela-Molina, 2021) y continua (Ramos-Rodríguez, 2014) de profesores chilenos, hemos llevado a cabo un estudio en el que se muestra las virtudes que ofrece el AD para fortalecer el proceso de desarrollo docente, al considerar dos casos: *a*) futuros profesores chilenos que trabajan el AD sobre fracciones, y *b*) una profesora chilena en ejercicio que participa en un programa de formación continua en el que realiza el AD sobre ecuaciones de primer grado (Ramos-Rodríguez *et al.*, 2019). Los resultados mostraron que los sujetos estudiados profundizan en el conocimiento del contenido matemático y las limitaciones de aprendizaje, antes de diseñar e implementar tareas matemáticas de una clase, lo que trae implicancias en la calidad de la planificación e implementación.

La articulación del AD como herramienta formativa ha contribuido a dar presencia a este en el ámbito de la educación matemática chilena. Ejemplo de ello, se pueden encontrar en la formación inicial de profesores de Primaria de la Universidad Alberto Hurtado y Universidad Católica del Norte, y en la formación continua de profesores de Secundaria de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Además de contribuir en los lineamientos de los programas de desarrollo profesional chilenos, se ha evidenciado que el rol del AD como fuente de profundización para el investigador. Destacamos los trabajos de final de grado en el Programa de Magister en Didáctica de la Matemática de la PUCV, los que, a partir del año 2016, contienen un capítulo en que los estudiantes desarrollan el AD del objeto matemático implicado en sus trabajos. Por ejemplo, la tesis de Araya (2018) presenta una secuencia didáctica para promover el aprendizaje de la variable aleatoria y su función de probabilidad fundamentada desde el AD.

En la Universidad Alberto Hurtado y Universidad Católica del Norte, el AD también se utiliza como fuente de investigación. En este caso, se incorpora para profundizar en el conocimiento desde el ámbito conceptual, cognitivo, de instrucción y la evaluación del objeto matemático implicados en los Proyectos de Titulación de algunos egresados de la carrera de Educación Básica, especialmente los que tienen la mención Matemática. Por ejemplo, Barra (2021) desarrolla cuentos matemáticos para la Educación Secundaria, en que los temas de las narraciones se ahondan desde el AD.

5. Modelo de conocimiento especializado del profesor de matemática-MTSK

El profesor de matemática, para desarrollar su práctica, necesita un conocimiento especializado para enseñar, tanto disciplinar como didáctico. En todo su quehacer profesional el profesor moviliza significados, propiedades y definiciones de los temas matemáticos, además, bosqueja las formas de construcción de la materia, las relaciones entre contenidos, el conocimiento sobre la enseñanza de matemática y las características del aprendizaje de contenidos matemáticos, entre otros.

Para ello, un buen referente para profundizar y comprender el conocimiento del profesor ha sido considerar el modelo *Mathematics Teacher's Specialized Knowledge* (MTSK), propuesta por el grupo SIDM de la Universidad de Huelva (Carrillo *et al.*, 2018), producto de que el saber de un profesor se considera especializado para enseñar. Esto ha llevado desde el año 2010 a relacionar el modelo de conocimiento MTSK con el AD, como fuente para hacer operativo el estudio del conocimiento del profesor, pero a la vez como principio para profundizar en los objetos matemáticos (Rojas, 2010).

Para comprender la articulación, definimos el modelo MTSK (figura 3) que considera dos grandes grupos de conocimiento de naturaleza diferente. Por un lado, presenta el conocimiento que tiene el profesor de matemática en un contexto escolar, el dominio del *Mathematical Knowledge* y el conocimiento de aspectos relacionados con el contenido matemático como objeto de enseñanza-aprendizaje, *Pedagogical Content Knowledge*. Además, en el centro integra las creencias en matemática y su enseñanza y aprendizaje.

El *Mathematical Knowledge* considera tres subdominios que componen y dan sentido al conocimiento matemático del profesor de matemática: el conocimiento profundo del contenido matemático, de su estructura y de cómo se procede y produce en matemática. El conocimiento de los temas describe qué y cómo el profesor de matemática conoce los temas que va a enseñar, el Conocimiento de la Estructura Matemática describe el conocimiento del profesor sobre relaciones entre contenidos matemáticos, el Conocimiento de la Práctica Matemática alude a la forma de proceder para llegar a los resultados matemáticos.

El *Pedagogical Content Knowledge*, desde los trabajos se Shulman (1986), se funda como un conocimiento particular del profesor, relacionado al contenido a enseñar, y realzado como la base de conocimiento que necesita un profesor para la enseñanza. En este dominio del conocimiento se distinguen tres subdominios, el primero de ellos referidos al conocimiento de la enseñanza de la matemática que implica el modo de representar el contenido y su potencial para la instrucción, así como el conocimiento de recursos y materiales didácticos. El conocimiento de las características del aprendizaje de la matemática, que implica el modo en que los alumnos piensan y construyen el conocimiento cuando se enfrentan a las actividades y tareas matemáticas, y al conocimiento de las características del proceso de comprensión de los distintos contenidos, así como de las fortalezas, dificultades y obstáculos asociados al aprendizaje del contenido en sí mismo. El conocimiento de los estándares de aprendizaje de la matemática considera el conocimiento del profesor sobre lo que está convenido curricularmente que aprenda un estudiante y el nivel de profundidad en cada nivel escolar, así como secuenciaciones del contenido y los saberes que lo sustentan.

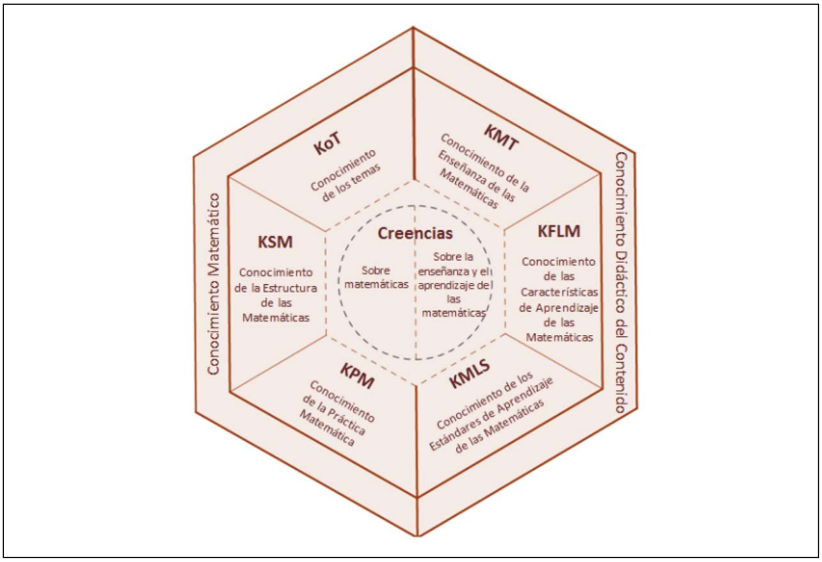


Figura 3. *The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge model*– MTSK. Fuente: Carrillo *et al.* (2013).

El modelo MTSK es una valiosa herramienta para profundizar en el conocimiento del profesor a partir de la observación de aula, además un recurso para el diseño de propuestas formativas para profesores en formación y en ejercicio. La especialización del modelo MTSK permite diferenciar los elementos del conocimiento general, para centrarnos exclusivamente en el conocimiento matemático y didáctico del contenido. A partir de la identificación y de la organización de componentes de conocimiento manifestado por profesores se permite profundizar en el conocimiento especializado en su conjunto y desde la óptica formativa permite diseñar acciones formativas orientadas en el conocimiento necesario integrar, activar o desarrollar.

Esta temática, a partir de las tesis doctorales dirigidas por Pablo Flores (Rojas, 2014; Valenzuela-Molina; 2021), ha tenido repercusión en el ámbito investigativo de Chile. Por ejemplo, a partir del año 2016, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso se cuenta con una variedad de tesis de magister y doctorado centradas en caracterizar el conocimiento especializado (MTSK) del profesor de matemática (Bozo, 2020; Miranda, 2016). Además, impulsando investigaciones conjuntas en la línea de la formación inicial y continua de profesores de matemática de la Universidad Alberto Hurtado, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso y Universidad Católica del Norte, como consecuencia de las experiencias doctorales guiadas por Pablo Flores y otros investigadores del área de educación matemática. De igual manera, este marco ha permeado el desarrollo investigativo para la estructuración de evaluaciones de diagnóstica en la formación inicial docente, considerando instrumentos que consideran el conocimiento matemático, así como las creencias sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje como elementos esenciales en los que indagar desde el comienzo de la formación inicial (Martínez-Videla *et al.*, 2019).

6. Relación el MTSK y el análisis didáctico

Considerando que los modelos de conocimiento incluyen categorías generales y que es necesario disponer de modelos que lleven a un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se manifiestan en una enseñanza de la matemática efectiva, queda de relieve que el profundizar en la enseñanza de la matemática desde la óptica del AD este permite a investigadores y profesores hacer una reflexión sobre la enseñanza del contenido matemático escolar y, además, establecer relaciones precisas entre los componentes del AD y los dominios de conocimiento (figura 4). Esto permite hacer una reconstrucción del conocimiento plausible que el profesor manifiesta en su tarea de enseñanza y, a la vez, ser una herramienta para planificar procesos formativos en el ámbito matemático. Por ejemplo, el subdominio «conocimiento de la enseñanza de la matemática» implica conocer los procedimientos matemáticos asociados a un determinado contenido, las propiedades y sus fundamentos, los sistemas de representación y elementos fenomenológicos que se asocian al contenido matemático, que al realizar el AD se profundizan en el análisis conceptual y de contenido. Asimismo, desde el análisis cognitivo y de instrucción se consideran aspectos de aprendizaje y de la enseñanza en relación con la organización del saber, tipos de tareas y secuenciación, características de aprendizaje de los estudiantes y recursos para la enseñanza.

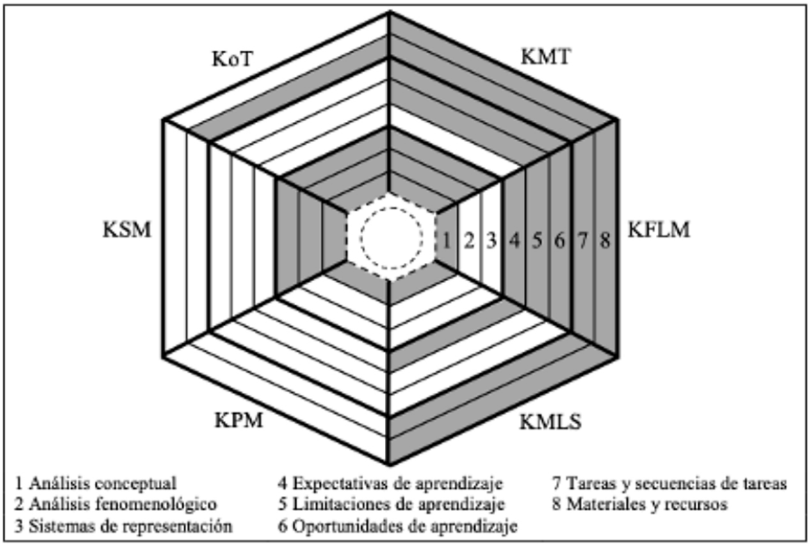


Figura 4. Relación MTSK-AD en la formación de profesores. Fuente: Rojas (2014, p. 94).

La operacionalización de este modelo en la formación inicial y continua de profesores en Chile ha permitido diseñar asignaturas de los planes curriculares y curso de formación en relación con el AD para transitar en los conocimientos necesarios para la enseñanza a partir del modelo MTSK (Ramos-Rodríguez *et al.*, 2021; Valenzuela-Molina, 2021). Desarrollando trabajos de diseño de secuencias de aula, por medio de la profundización de los temas matemáticos y didácticos a partir de la práctica docente; con un enfoque metodológico para investigar y profundizar en aspectos disciplinares y didácticos del objeto matemático, lo que permite tener una mirada profunda y amplia sobre la matemática que se ponen de manifiesto al observar ciertas reacciones y procesos de aprendizaje de los futuros maestros.

Por otro lado, el AD contribuye al desarrollo de la investigación, ya que la realización de este en relación con el tema de las fracciones ha permitido profundizar y establecer descriptores de conocimiento para cada subdominio de modelo MTSK. En síntesis, el análisis didáctico ha sido en este estudio una herramienta con doble utilidad, como herramienta investigativa (Rojas *et al.*, 2013) y como herramienta formativa (Rico, 2013), lo que permite describir y caracterizar la transformación de conocimiento especializado.

6.1. Transformación de MTSK en un contexto formativo con AD

El contexto formativo del AD en la tesis doctoral de Valenzuela-Molina (2021), codirigida por Pablo Flores, permite observar, describir y caracterizar la transformación de conocimiento especializado sobre división de fracciones de futuras profesoras.

> La transformación del conocimiento del profesor (o futuro profesor) se puede evidenciar cuando este manifiesta cambios graduales sobre lo que es capaz de hacer con otros y luego individualmente, a partir de una reflexión personal, generada individualmente o a partir de agentes externos, tomando conciencia de lo nuevo o de los cambios que se generan para la readecuación de la práctica. (Valenzuela-Molina, 2021, p. 35)

Desde esta conceptualización, se evidencia la transformación de MTSK de futuras profesoras, en diferentes momentos durante su formación, las que se manifiestan con acciones concretas de transformación consciente, al rediseñar tareas de enseñanza para la división de fracciones, cuyo cimiento base de conocimiento se logra por medio del AD y la reflexión constante sobre los cambios y decisiones conscientes que van tomando en el camino.

Desde este punto de vista de la transición de conocimientos, en esta investigación cada uno de los elementos involucrados en el AD, tanto los conceptos como los procedimientos, significados, fenómenos, errores y dificultades, entre otros, facilitan a las futuras profesoras el conocer y organizar la enseñanza desde un punto de vista teórico y práctico. Ellas se enfocaron en profundizar sobre los organizadores del currículo del AD para la división de fracciones, elementos que se evidencian en el diseño de planificación por medio de la incorporación de estrategias y algoritmos, en la consideración de algunos errores que pueden cometer sus estudiantes y en la propuesta de situaciones problemas que estructuran la clase. El AD favoreció la adquisición de conocimiento matemático y didáctico de las profesoras, el cual se va reformulando en la medida que avanza su proceso formativo, cuando diseñan y rediseñan la clase a implementar. Esta transformación tiene sus cimientos en la discusión y retroalimentación constante que se producen durante la reflexión en el aula formativa, lo que facilita la transformación de conocimiento.

La transformación de MTSK fue evidenciada desde dos posturas. La primera de ellas se pone de manifiesto cuando los profesores van reestructurando su conocimiento especializado, de tal manera de ir avanzando desde un MTSK inicial a un MTSK idóneo o pretendido (desde la postura de los estándares para profesores de Educación Primaria y del perfil de egreso de cada universidad). Es decir, una reestructuración del anterior, tanto en el qué hacer como en el cómo hacerlo. Cabe destacar que no nos referimos a un MTSK final, pues este siempre está en constante transformación.

Una segunda postura tiene su origen en la relación interna y coherente entre categorías dentro de un mismo subdominio o fuera de él (en MTSK), ya que podría esperarse que un profesor modifique su conocimiento especializado de manera que se logre coherencia entre las categorías y dominios. En síntesis, la transformación del conocimiento especializado del profesor puede ser mediado a partir del uso de la herramienta de análisis didáctico, permitiendo a los profesores o futuros profesores modificar su conocimiento, desde un conocimiento inicial que transita a un nuevo conocimiento pretendido.

7. Contribuciones, una mirada global

Las tesis doctorales y trabajos presentados a lo largo del estudio dejan en evidencia que estas líneas de investigación y formación han seguido su desarrollo en la educación chilena. Así, la reflexión docente, la relación con el modelo de conocimiento especializado y la integración en la práctica del AD (no solo con foco en la planificación) han tomado presencia en diversos espacios formativos de Chile.

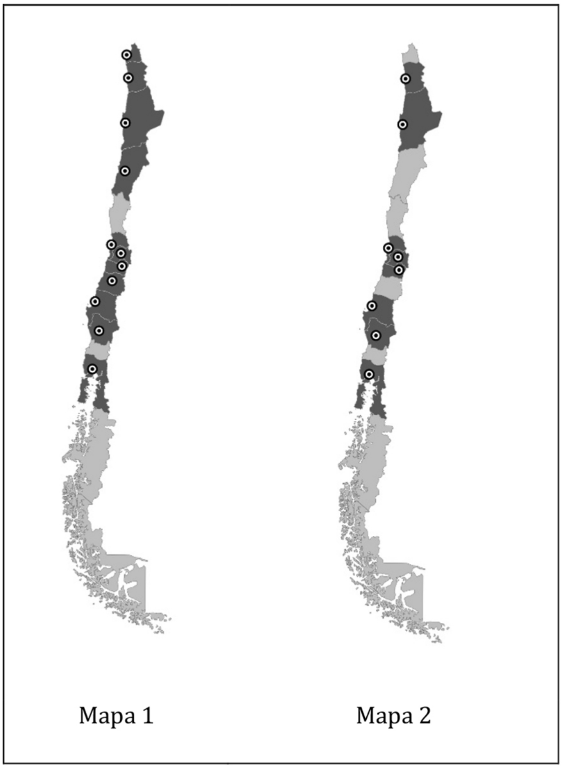


Figura 5. Utilización del AD, MTSK y la reflexión en la formación inicial y desarrollo profesional en Chile.

Una mirada global de ello es posible visualizar en la figura 5, en que se destacan (en negro) las regiones de Chile en que desarrollan estos referentes teóricos en la formación inicial y continua (mapa 1) llegando a ser 11 de las 16 regiones del país. De igual forma, en el mapa 2 se da cuenta de aquellas regiones en que se utilizan los marcos en el contexto de formación de posgrado y en el ámbito investigativo llegando a 8 regiones. Esto muestra que distintas universidades, investigadores y grupos de formación emplean estos referentes conceptuales para el desarrollo de la educación matemática en el país para tributar a la mejora de los aprendizajes de los estudiantes.

Por lo tanto, el AD se ha manifestado como una efectiva herramienta teórica-metodológica para el estudio del conocimiento de profesores en ejercicio y formación, en distintos ámbitos educativos. Además, considerando que los modelos de conocimiento suelen incluir categorías generales, se ha avanzado a un análisis detallado de cada uno de los tipos de conocimiento, que se manifiestan en la enseñanza de la matemática. Aportando el AD indicadores de conocimiento relacionados con el modelo MTSK, referentes a variados temas matemáticos.

Estas contribuciones pueden seguir ampliándose y fortaleciendo redes de colaboración, dado que la tarea docente exige una alta preparación profesional, una instrucción continua y el desarrollo de nuevas formas de vinculación entre universidades, centros de investigación nacionales e internacionales.

8. Referencias

Araya, D. (2018). *Secuencia didáctica para promover el aprendizaje de la variable aleatoria y su función de probabilidad desde el Análisis Didáctico* [tesis de magíster]. PUCV.

Barra, M. (2021). *El cuento para la enseñanza y aprendizaje de la matemática en Educación Media* [trabajo final de grado]. Universidad Católica del Norte.

Bozo, F. (2020). *Mecanismos utilizados por los docentes en las transformaciones de conversión y tratamiento en el MCD a través del modelo MTSK* [tesis de magíster]. PUCV.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialized Knowledge for Mathematics Teaching. En: Ubuz, B., Haser, C. y Mariotti, M. A. (eds.). *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University.

Carrillo, J., Climent, N., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M. A., Contreras, L. C., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar, A., Ribeiro, M. y Muñoz-Catalán. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981.

Corrial, C. (2016). *Conocimiento de una profesora novel respecto de ecuaciones lineales en un curso de acompañamiento para evaluación docente* [tesis de magíster]. PUCV.

Climent, N. (2005). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática: un estudio de* caso [tesis doctoral]. Universidad de Huelva.

Contreras, J. (2011). *La autonomía del profesorado*. Morata.
Cooney, T. J. (2001). Considering the paradoxes, perils, and purposes of conceptualizing teacher development. En: Lin, F. L. y Cooney, T. J. (eds.). *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 9-31). Kluwer.
Darling-Hammond, L. (2000). Teacher quality and student achievement. *Education policy analysis archives*, *8*(1), 1-44. https://doi.org/10.14507/epaa.v8n1.2000
Darling-Hammond, L., Johnson, C. y Chung Wei, R. (2009). Teacher preparation and teacher learning: A changing policy landscape. En: Sykes, G., Schneider, B. y Plank, D. N. (eds.). *Handbook of education policy research* (pp. 613-636). Routledge.
Elliot, J. (2004). Using research to improve practice: the notion of evidence-based practice. En: Day, C. y Sachs, J. (eds.). International handbook of the continuing professional development of teachers (pp. 264-290). Open University Press.
Elipane, L. (2011). Incorporating lesson study in pre-service mathematics teacher education. En: Ubuz, B. (ed.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 257-282). PME.
Flores, P. (1997). El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. En: Berenguer, M. I. *et al.* (eds.). *Investigación en el aula de matemáticas* (pp. 13-27). THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática.
Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. *PNA*, *1*(4), 139-159.
Gómez, P. (2007). Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria [tesis doctoral]. Universidad de Granada.
Isoda, A., Arcavi, A. y Mena, A. (2012). *El estudio de clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
Korthagen, F. A. J. (2010). La práctica, la teoría y la persona en formación del profesorado. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, *68*(24), 83-101.
Korthagen, F. A. (2011). Making teacher education relevant for practice: The pedagogy of realistic teacher education. *Orbis scholae*, *5*(2), 31-50.
Martínez-Videla, M., Rojas-Sateler, F., Ulloa, R., Chandía, E., Ortíz, A. y Perdomo, J. (2019). Creencias y conocimiento matemático escolar

al comienzo de la formación inicial docente en estudiantes de Pedagogía General Básica. Pensamiento Educativo. *Revista de Investigación Educacional Latinoamericana*, *56*(2), 1-19.

Ministerio de Educación [MINEDUC] (2012). *Bases curriculares*. Gobierno de Chile.

Miranda, M. (2016). *El conocimiento especializado del profesor de matemáticas de segundo ciclo básico en la enseñanza de inecuaciones lineales* [tesis de magíster]. PUCV.

Ramos-Rodríguez, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación continua* [tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Ramos-Rodríguez, E., Bustos, B. y Morales, A. (2021). Identification of the Principles of Effective Professional Development Programs and Their Impact: An Investigation of the Guidelines of a Mathematics Didactic Graduate Program and a Case Study Focused on Teacher Training. *The International Journal of Science, Mathematics and Technology Learning*, *29*(1), 1-16. DOI:10.18848/2327-7971/CGP/v29i01/1-16.

Ramos-Rodríguez, E., Flores, P. y Ponte, J. P. (2017). Práctica y reflexión de profesores de matemáticas chilenos bajo la perspectiva del Estudio de Clases. *Quadrante*, *XXVI*(2), 69-97.

Ramos-Rodríguez, E., Valenzuela, M. y Flores, P. (2019). El análisis didáctico como herramienta en la formación inicial y continua de profesores de matemática. En: Olfos, R., Ramos-Rodríguez, E. y Zakaryan, D. (eds.). *Formación de profesores: Aportes a la práctica docente desde la Didáctica de la Matemática* (pp. 51-100). Graó.

Rojas, N. (2010). *Conocimiento para la enseñanza y calidad matemática de la instrucción del concepto de fracción: estudio de caso de un profesor chileno* [trabajo de fin de máster]. Universidad de Granada.

Rojas. N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: Un estudio de casos* [tesis doctoral]. Universidad de Granada.

Rojas, N., Flores, P. y Ramos, E. (2013). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En: Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (eds.). *Análisis didáctico en Educación Matemática. Metodología de investigación, innovación curricular y formación de profesores* (pp. 191-208). Universidad de Granada.

Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Paidós.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Valenzuela-Molina, M. (2021). *Transformación del conocimiento especializado sobre división de fracciones de futuras profesoras en un contexto de Estudio de Clases* [tesis doctoral]. PUCV.

18

La enseñanza de la función logarítmica como inversa de la función exponencial: un estudio de caso

The teaching of the logarithmic function as the inverse of the exponential function: A case analysis

Jeannette Vargas Hernández[1] y María Teresa González Astudillo[2]
[1]Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca, Bogotá, Colombia
[2]Universidad de Salamanca

Resumen
En este documento se presenta cómo un profesor, a través de su práctica, modela la función logarítmica como inversa de la función exponencial. El análisis de la práctica del profesor se realiza desde una perspectiva sociocultural y la teoría APOE mostrando que el mecanismo de reversión se modela con otros mecanismos de construcción, como la interiorización, la desencapsulación y la coordinación. Para ello se utilizan diferentes registros como el simbólico o el gráfico y se realiza tanto de una forma global, con la función genérica $y = a^x$, como local, con funciones particulares como $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = 5^x$. Los métodos utilizados para realizar la inversión también son variados: deshacer, cambiar las variables y despejar, componer una función y su inversa o realizar la simétrica de la gráfica de la función.

Palabras clave: función logarítmica, APOE, función inversa, práctica del profesor, mecanismos de construcción

Abstract
In this document we present how a teacher, during his practice, model the logarithmic function as inverse of the exponential function. The analysis of the teacher practice is done from a sociocultural perspective and APOS theory showing that the reverse mechanism is modelized joint with other mechanisms such as the interiorization, the desencapsulation and the coordination. For this, other forms of representations were considered such as the symbolic or the graphical ones and this is done with the generic function $y = a^x$, and

other functions as $y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = 5^x$. The processes used for the inversion varied: undoing, swapping the variables x and y and solving for y, composing the function with its inverse to get the identity or to flipping the graph of the function in the line $y = x$.

Keywords: logarithmic function, APOS, inverse function, teacher practice, construction mechanism

1. Introducción

En general, en la enseñanza se plantea la función logarítmica como inversa de la función exponencial. Esto implica, por un lado, que el estudiante debe haber adquirido una comprensión adecuada de la función exponencial y, por otro, que domina la construcción de funciones inversas, lo que, en principio no resulta sencillo, como señalan algunas investigaciones (Breen *et al.*, 2015). Pettersson *et al.* (2013) han mostrado las dificultades que tienen los estudiantes para comprender la noción de función como pares ordenados en lugar de como una regla, lo que es esencial para comprender el proceso de inversión. Carlson *et al.* (2010) consideran que los estudiantes que no son capaces de concebir una función como un proceso (sino que tiene una concepción acción) tienen grandes dificultades para invertir funciones. Además, cometen errores al determinar cuál es la función inversa de otra, puesto que no utilizan las propiedades de la función inversa, como la condición de que la función a invertir sea inyectiva y se limitan a realizar ciertos cálculos para obtener la respuesta (Even, 1992). En general, la función inversa se enseña de una forma algorítmica, rutinaria, memorística y carente de sentido (Wilson *et al.*, 2011).

Carlson y Oehrtman (2005) han categorizado tres métodos diferentes para obtener una función inversa de otra: una algebraica (intercambiar x e y, y despejar y), una geométrica (la reflexión sobre la recta $y = x$) y una procesual en el sentido de deshacer. Además, Vidakovic (1996) menciona el cálculo de la inversa de una función partiendo de dicha función y buscando el proceso que compuesto con ella dé la función identidad.

En cuanto al primer método, Wilson, *et al.* (2011) consideran que el intercambio entre las variables es confuso para los estudiantes y puede conducir a una ausencia de significado de la función inversa, dado que no se tiene en cuenta que el dominio de la función inversa es el rango de la función inicial y viceversa. Esto, además, es de vital importancia cuando las unidades en las que se miden la variable dependiente y la independiente son diferentes. Por otro lado, este intercambio implica el cambio de significado entre las variables (Carlson y Oehrtman, 2005; Philips, 2015) y cuestiones relativas a la notación, como que $f^{-1}(x)$ es la inversa de $f(x)$ no ayudan a adquirir una comprensión adecuada de este concepto.

En cuanto a la aproximación geométrica, Attorps *et al.* (2013), en un estudio sobre el uso de GeoGebra para la enseñanza de la función inversa, mostraron que los estudiantes lograron una concepción intuitiva, pero no llegaron a comprender en su totalidad por qué se debe realizar una reflexión en torno a la recta x = y. Sin embargo, aquellos estudiantes que logran una comprensión de la función inversa enfatizan en la condición de que debe ser una función uno a uno (Bayazit y Gray, 2004).

En cuanto al último método Bayacit y Gray (2004), basando sus estudios en la teoría APOE, determinaron que los estudiantes conocen la función inversa como una acción (Cottrill *et al.*, 1996) si invierten el proceso de una función paso a paso y lo conocen como un proceso (Breidenbach *et al.*, 1992) si utilizan la función inversa en situaciones que no involucran sustituir en una fórmula. Como conclusión, se estableció que los estudiantes deben realizar tareas no solo procedimentales, sino aquellas que estén más centradas en el aspecto conceptual de la función inversa para que lleguen a adquirir dicho concepto.

Para comprender el proceso de construcción de la función inversa, Vidakovic (1996) presentó una descomposición genética considerando que los estudiantes deben adquirir de forma jerárquica los esquemas de función, composición de funciones y, finalmente, función inversa y señalando que los estudiantes han adquirido el concepto si son capaces de coordinar estos tres esquemas. Aun así, Brown y Reynolds (2007) y Kimani y Masingila (2006) han probado que los estudiantes son capaces de determinar la expresión analítica de la función inversa, pero no usan la noción de composición de funciones, ni son capaces de relacionar los resultados con la composición de funciones.

Todas las investigaciones anteriores se centran en los aspectos cognitivos relativos al aprendizaje de la función inversa. Sin embargo, se han realizado pocas investigaciones sobre la enseñanza, más concretamente de la función logarítmica como inversa de la exponencial. En este capítulo se presenta una investigación cuyo objetivo es establecer cómo el profesor modela la enseñanza de la función logarítmica a la luz de la herramienta analítica modelación de mecanismos de construcción desde una perspectiva sociocultural y la teoría APOE, identificando si, en las clases, la modelación potencia el mecanismo de reversión desde la función exponencial para la construcción de la función logaritmo.

2. Marco teórico

Esta investigación recurre al constructo «modelación de un mecanismo de construcción» (García *et al.*, 2012) como una herramienta para examinar la práctica del profesor a través de las tareas que propone y el uso de los instrumentos de la práctica tales como los registros de representación y los elementos matemáticos de un concepto.

Este constructo lleva implícito una postura frente a la construcción del conocimiento matemático enmarcada en la teoría APOE (Dubinsky, 1991), según la cual, para comprender un concepto de matemática avanzada, los estudiantes construyen estructuras mentales denominadas: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*. Dichas estructuras están ligadas a la noción de abstracción reflexiva de Piaget y vienen determinadas por mecanismos mentales como la interiorización, coordinación, encapsulación, desencapsulación, reversión y tematización.

En la teoría APOE, se parte de la idea de que la comprensión matemática de un concepto se inicia con la manipulación de un objeto físico o mental para formar acciones, de manera que la repetición de esas manipulaciones permita que sean interiorizadas para formar procesos, los cuales pueden ser encapsulados para formar objetos. Se pueden coordinar dos o más procesos, lo que faculta para construir un nuevo proceso o un objeto, o bien, construir procesos nuevos a partir de procesos existentes mediante el mecanismo de reversión. Cuando un estudiante es capaz de revertir los pasos de una transformación matemática se produce un progreso significativo en su conocimiento matemático (Dubinsky, 1996). Los objetos pueden ser *desencapsulados* revirtiendo el proceso por el cual fueron formados. Finalmente, acciones, procesos y objetos pueden ser organizados en esquemas (Dubinsky y McDonald, 2001).

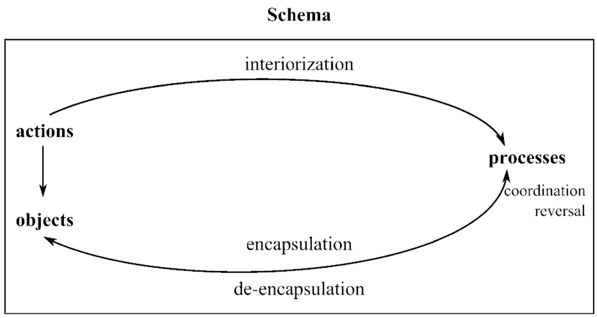


Figura 1. Proceso de construcción de un concepto. Fuente: Arnon *et al.* (2014, p. 18).

Por otro lado, la modelación de un mecanismo de construcción parte de que la visibilidad del discurso y la naturaleza de las acciones del profesor provienen de una perspectiva sociocultural y se reconoce que la práctica docente es una actividad mediada por el uso de ciertos «instrumentos» (Llinares, 2000) y, por lo tanto, permiten caracterizarla. Esta perspectiva asume que:

> [...] los instrumentos utilizados y su forma de utilización influyen en el tipo de comprensión matemática. (Llinares, 2000, p. 115)

De ahí que la justificación del uso de los instrumentos en esa práctica se interpreta a la luz de una perspectiva cognitiva (Vargas, 2017).

Sin embargo, es necesario tener presente que el análisis que se realiza mediante este constructo se refiere a la construcción de un conocimiento mediante la interacción entre un profesor y los estudiantes, siendo la clase un colectivo y no refiriéndose en ningún caso a un estudiante concreto.

3. Metodología

Esta investigación tiene una aproximación interpretativa, ya que pretende establecer, sin juzgar, el significado que subyace a las acciones realizadas por un profesor (tareas, usos de los elementos matemáticos del concepto y sistemas de representación) y sus justificaciones. Para ello, se realizó un estudio de caso, de una práctica ordinaria, con un profesor de una universidad de Bogotá (Colombia), Felipe (pseudónimo), que impartía una asignatura de Precálculo,[1] común a todos los estudiantes de primer semestre universitario en diversos pregrados.[2]

La enseñanza de la función logarítmica se realizó con posterioridad a la de la función exponencial y como función inversa de esta última. Se llevó a cabo en dos sesiones de clase de noventa minutos de duración cada una. Durante las sesiones de clase el profesor planteaba algunos ejercicios o ejemplos a los estudiantes a modo de tareas para resolver juntamente con ellos, de forma que guiaran las explicaciones teóricas necesarias para comprender el concepto.

Para la recogida de datos, se utilizaron tres instrumentos: una entrevista inicial al profesor, las videograbaciones de cada una de las sesiones de clase y entrevistas posteriores a cada sesión de aula al profesor. La entrevista inicial consistió en una entrevista estructurada sobre sus datos biográficos y su formación académica. En cada una de las entrevistas posteriores a cada clase, se revisaba la grabación de dicha sesión y se discutía con el docente acerca de sus propósitos, las modificaciones realizadas respecto de la planificación inicial y se contrastaba con el análisis realizado por el investigador. Se contó, además, con la planificación del profesor de cada una de las sesiones. Todas las grabaciones fueron transcritas y junto con el resto de los datos pasaron a formar parte de una unidad hermenéutica creada con el *software* ATLAS.ti (Vargas, 2017).

El análisis se realizó en tres etapas. Inicialmente se identificaron los segmentos de las clases en los que se modelaba el mecanismo de reversión. En una segunda etapa, para cada uno de esos segmentos, se identificaron los registros de representación utilizados y otros conceptos matemáticos usados por el profesor durante la enseñanza y se contrastó con las respuestas del profesor en las entrevistas.

1. La asignatura de Precálculo en Colombia se identifica con aquellos cursos previos al estudio del Análisis Matemático.

2. La denominación Pregrado corresponde a licenciatura o grado en la estructura de la educación europea.

En la tercera etapa, se fueron identificando otros mecanismos de construcción (aparte de la reversión) que el docente modelaba para que sus estudiantes construyeran el concepto de *función logarítmica* como función inversa de la función exponencial.

Los segmentos de clase están determinados, además, en función de varios parámetros que permiten establecer dónde se inicia un segmento y dónde termina: identificación de la tarea a realizar, registro de representación utilizado, conceptos matemáticos asociados y otros mecanismos de construcción involucrados.

Este análisis se realizó mediante la triangulación de todos los datos recogidos: vídeo y audio de clase, entrevistas con el docente, planificación del docente y triangulación de investigadores que trabajaron a partir de la misma unidad hermenéutica segmentando cada clase individualmente, asignando mecanismos y discutiendo las coincidencias acerca de la modelación que los investigadores extraen de las tareas e intenciones aportadas por el profesor.

Finalmente, se realizó el informe de las observaciones, análisis e inferencias sobre el conjunto de datos mediante viñetas (Vargas, 2017). Este recurso permitió organizar la información y poder entrelazar, en un mismo documento, las evidencias y el análisis de datos sobre la modelación del mecanismo de reversión identificado en la práctica y, de esta forma, la viñeta se usa para establecer y mostrar la modelación del mecanismo de inversión en la práctica del docente.

Se entiende en esta investigación por práctica ordinaria, aquella en donde el investigador no interviene ni en la preparación ni en el manejo las clases (Hersant y Perrin-Glorian, 2005).

4. Resultados

El análisis de dos de las sesiones de clase grabadas se corresponde a la introducción que realiza el profesor de la función logarítmica como inversa de la función exponencial, que ya se ha trabajado previamente con los estudiantes. El mecanismo de reversión se modela en estas dos sesiones juntamente con otros mecanismos como la interiorización, la coordinación o la encapsulación. Por ello, la descripción de los resultados se ha dividido en tres viñetas que se corresponden con los mecanismos identificados.

En los diálogos escogidos para mostrar la modelación del mecanismo de reversión se ha utilizado la P para identificar al profesor, una E para un estudiante y la I para el investigador en las entrevistas.

4.1. Viñeta 1: el logaritmo como operación mediante el mecanismo de interiorización de acciones

En esta viñeta, el profesor parte de una situación relativa al interés compuesto que es lo que se ha trabajado anteriormente con los estudiantes para construir el concepto de *función exponencial*. Por medio de diversas acciones con la operación exponencial y, variando la base de la potencia, el profesor modela el mecanismo de interiorización de acciones en procesos.

La tarea inicial que se plantea a los alumnos es: «¿En cuánto tiempo se tiene un capital de $2.300.000, cuando se invierten $2.000.000 a una tasa de interés del 2 por ciento anuales compuestos?».

El profesor procede a guiar a los estudiantes con varias preguntas con el objetivo de escribir la ecuación a la que conduce el enunciado de la tarea. La colaboración de todos los alumnos hace que lleguen a la ecuación:

$$2.300.000 = 2.000.000\left(1+\frac{0,03}{12}\right)^{12t}$$

Como el profesor considera la ecuación anterior muy elaborada, empieza con una ecuación más sencilla: $2^x = 8$.

P: Entonces escribamos una parecida [va escribiendo en el tablero 2 elevado a *x* igual 8]. ¿En qué se parece a la anterior, Juan Camilo?
E: Que está elevada a una potencia.
P: ¿Y qué más?
E: Que el número que no se sabe está en el exponente.
...
P: Entonces, fíjense... que cuando a mí me preguntan por el exponente... ¿qué cosa es, Camilo? ¿Tú te acuerdas del colegio?
E. Logaritmo.

El profesor plantea preguntas para caracterizar la ecuación y potenciar la interiorización de acciones. Primero se centra en la identificación de la posición en la cual se encuentra la incógnita y la interpretación del logaritmo de un número como el valor del exponente en una potencia, es decir, está ligado a la operación inversa.

A continuación, se cambia de base y, en lugar de utilizar la base 2, utiliza la base 10. El profesor modela con los alumnos el mecanismo de reversión para diversas potencias enteras de 10.

P: Logaritmo en base 10 de 10000. Vamos pensando, no lo digan todavía... ¿Carlos?
E: Cuatro.
P: Cuatro. Ustedes qué dicen.
E: Sí.
P: Lo comprobamos. Diez por diez, cien, por diez, mil, por diez, diez mil. Era cuatro [lo escribe en el tablero].
...
P: Ahora pensemos en valores que no son potencias de diez. Por ejemplo, logaritmo de 45. Si uno fuera buscar el logaritmo de 45 y empieza a mirar diez, entonces uno dice 10 por 10 es cien. Se pasó, entonces uno dice debe ser un número que está entre...
E: Uno y dos.

En esta viñeta se puede comprobar cómo el profesor utiliza la operación de la exponencial variando la base (2 y 10) para modelar la interiorización de acciones y construir la operación logaritmo. Esto no se hace exclusivamente con exponentes enteros, sino que aprovecha la tabla de los logaritmos de la unidad seguida de ceros para establecer la escala logarítmica y poder determinar la parte entera del logaritmo decimal de un número que no es una potencia de 10.

4.2. Viñeta 2: la función logarítmica como desencapsulación del objeto función exponencial

Al tratamiento del logaritmo como operación le sigue la construcción de la función logarítmica. Sin embargo, en el desarrollo de estas tareas, el profesor retorna en varias oportunidades a la operación logaritmo. El centro de atención recae en algunos puntos de la representación gráfica de la función exponencial, con lo cual está favoreciendo la desencapsulación de esta función.

En este contexto se plantea una nueva tarea que consiste en *calcular el logaritmo natural de un número decimal: 0,1.* Para ello, el profesor recurre a la función exponencial $y = 10^x$ y pregunta por la forma de la gráfica de dicha función, por lo cual está favoreciendo la desencapsulación del objeto función exponencial (en su representación gráfica) en un proceso de asignación de valores.

E: Logaritmo en base 10 de 0,1.
P: Veamos. Si yo tengo 10 elevado a la cero da uno y diez a la uno da 10. El número no está entre 1 y 10. Ese está entre el cero y el uno... ¿Se acuerdan cuál era la gráfica de la función *y* igual a 10 elevado a la *x*? Recordemos la gráfica.

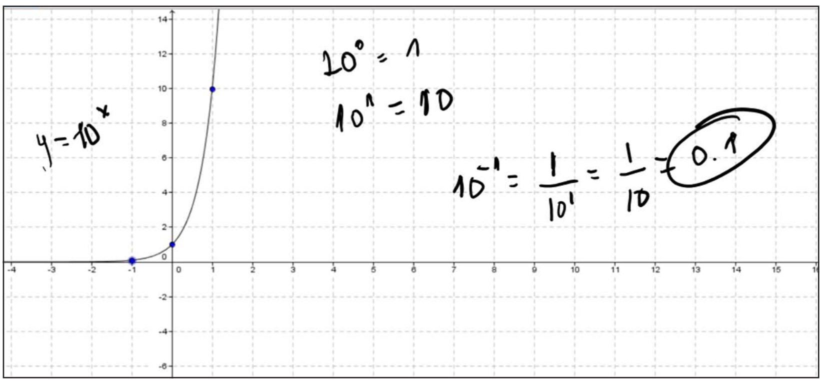


Figura 2. Imagen de la gráfica de $y = 10^x$ en el tablero.

P: Entonces ¿cómo ir bajando el exponente? Estos números ¿cómo son? [señala en el eje valores negativos]. Por ejemplo, este es ¿cuál?
E: Menos 1.
P: Menos 1. Y ¿cuánto es el 10 a la menos 1?
E: Un décimo. Cero coma uno.
P: Si yo le pregunto, dígame diez elevado a qué número me da cero como uno, usted ¿qué número me diría?
E: Menos 1.

Continúa de la misma forma para otros valores decimales como 0,01 para llegar a la conclusión de que $log_{10}10^x = x$.

En esta segunda viñeta se modela el mecanismo de reversión a partir de la representación gráfica de la función $y = 10^x$, desencapsulando el objeto función exponencial en un proceso para determinar el logaritmo de números decimales, encontrando que el resultado es un número negativo. Es importante resaltar la insistencia que el profesor muestra en cuanto a que la función debe ser uno a uno (Bayazit y Gray, 2004) lo que se modela mediante la coordinación de los procesos función exponencial y función cuadrática con la que se compara.

P: ¿Qué quiere decir que se una función uno a uno, Nicolás?
E: Que cuando trazamos líneas.
P: Que cuando la cortamos con líneas horizontales la intersecta en un solo punto.
E: Que para cada valor de *x* le corresponde solo uno en *y*.
P: Ustedes ¿qué opinan de lo que dice Carlos? ¿Será suficiente con lo que él dice? Por ejemplo, esta función. [Escribe en el tablero *f* de *x* igual a *x* al cuadrado, y realiza la gráfica.]

4.3. Viñeta 3: el objeto función logarítmica coordinando la inversión de diversas funciones

Para propiciar la construcción del objeto función inversa general, el profesor procede primero con tareas de construcción de varios procesos de funciones inversas particulares: una función cuadrática, una lineal y una exponencial. Para ello utiliza diferentes métodos tanto en el registro gráfico como en el simbólico y lo ejemplifica para funciones conocidas como *funciones lineales* o *cuadráticas*, para luego coordinar estos procesos con la función exponencial. Eso se realiza como un proceso y recurriendo a la representación gráfica de dicha función. Toma un valor particular, potenciando que los estudiantes trabajen con dicho caso y luego generalicen a la función.

En este momento, como la función exponencial particular es una función uno a uno, se propicia la encapsulación de su función inversa, la función logarítmica, mediante el intercambio de variables.

P: Entonces, la pregunta es ¿cuál es la inversa de la función dos a la *x*? Vamos a seguir el camino de intercambiar la *x* y la *y*, y luego tengo que despejar la *y*.

E: *x* igual a dos a la *y*.
P: Y ahora voy a despejar la *y*, pero la *y* ¿dónde está?
E: En el exponente.
P: Si la voy a despejar, ¿cómo la tengo que despejar? Con...
E: Con un logaritmo.
P: Con un logaritmo, ¿cómo me queda?
E: *y* igual a logaritmo en base dos de *x*.

Se cambia al registro gráfico, para lo cual se modela la desencapsulación en un proceso tomando algunos puntos de la gráfica de la función exponencial, realizando la inversión punto a punto de forma geométrica.

P: Vamos a hacer la gráfica de la función. ¿Qué hay que hacer para elaborar la gráfica de la función logaritmo en base dos de *x*?
E: Poner el espejo.

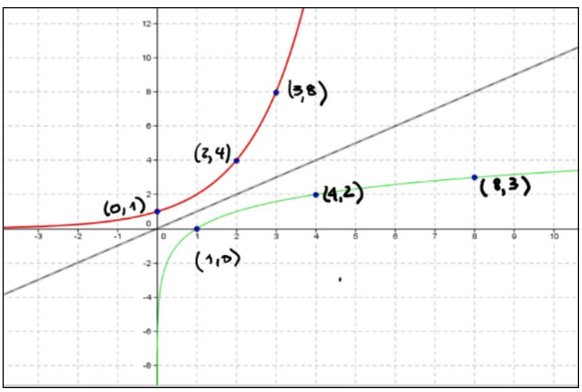


Figura 3. Construcción de la gráfica de la función logaritmo en base dos como inversa de la función $y = 2^x$.

P: El espejo va por aquí, a 45 grados, y entonces vamos a ver en dónde están los reflejos. Por ejemplo, este punto ¿qué coordenadas tiene?
E: (0,1).
P: Las parejas se intercambian. Si está en (0,1), en la inversa está en (1,0). Otra pareja, por ejemplo (2,4), quiere decir que la *x* vale dos, dos a la dos, la *y* vale 4. De manera que en la gráfica de la inversa a aparecer...

La tarea de realizar la gráfica punto a punto requiere del proceso de inversión de las coordenadas de cada pareja ordenada (Pettersson *et al.*, 2013) y estas acciones se pueden potenciar para ser interiorizadas como un proceso.

Finalmente, se utiliza la función compuesta entre las dos funciones inversas para examinar que el resultado es la función identidad.

P: Si usted, por ejemplo, toma 3. Ponga a trabajar primero la exponencial y eleve dos a la tres. Esto le da un número. Y si después dice que va a buscar el logaritmo en base dos de ese número, ¿cuánto le da eso?

E: Tres.

En esta última viñeta se observa cómo se construye el objeto función logarítmica como inversa de la función exponencial, realizando la inversión de diferentes formas: por un lado, a través de la gráfica simétrica respecto a la recta $y = x$ de la función exponencial (y en el caso de la función lineal invirtiendo la pendiente de la recta); por otro, intercambiando la x y la y en la expresión analítica de la función exponencial y despejando la y. Finalmente, recordando que la composición de una función y su inversa constituye la función identidad. Todo ello utilizando diferentes registros de representación y coordinando diferentes procesos correspondientes a las funciones lineal, cuadrática y exponencial.

5. Discusión y conclusiones

El análisis de la práctica de un profesor cuando enseña la función logarítmica como inversa de la función exponencial nos ha permitido organizar la modelación del mecanismo de reversión en tres viñetas, a partir de tres tareas en las que se modelan tres mecanismos de construcción de la función logarítmica.

Vidakovic (1997), cuando propone una descomposición genética de la función inversa, considera que los estudiantes alcanzan una comprensión de este concepto cuando integran los esquemas de función, función compuesta y, finalmente, la función inversa. En la práctica que se describe en este capítulo se han identificado aquellos momentos en los que el profesor recurre a estos tres esquemas. Utiliza diferentes funciones (lineal, cuadrática, exponencial), propone la composición de una función y su inversa para obtener la función identidad, y modela el mecanismo de reversión de procesos y objetos para construir la función logarítmica.

En las tareas seleccionadas por el profesor con las que se busca potenciar la comprensión de la función inversa se recurre a diferentes métodos: el método de deshacer (Even, 1992), que la composición de una función y su inversa sea la identidad, en la acción de intercambiar variables (Vidakovic, 1996) y cuando se trabaja en el registro gráfico y se hace una simetría de la gráfica de la función exponencial respecto de la recta $y = x$ (Carlson y Oehrtman, 2005). Métodos que, de acuerdo con los investigadores citados, presentan algunas dificultades atendiendo a las exigencias cognitivas que requieren para lograr la comprensión por parte de los estudiantes.

En este caso, el análisis ha mostrado que el mecanismo de reversión no se modela de forma aislada, interviniendo, por lo tanto, una gran exigencia de construcciones mentales, dado que se combina con otros mecanismos. Así, se combina con la interiorización de acciones no solo sobre la operación exponencial, sino también con acciones sobre la exponencial como función. También se combina con la desencapsulación de la función exponencial como objeto para convertirla en un proceso cognitivo y con la coordinación de otros procesos relativos a funciones lineales y cuadráticas.

Por otro lado, se ha comprobado cómo el mecanismo de reversión del objeto función exponencial ($y = a^x$) se lleva a cabo a través de la inversión de funciones exponenciales particulares ($y = 2^x$, $y = 10^x$, $y = 5^x$) (Vargas *et al.*, 2020). Esto se hace modelando la interiorización de acciones y considerando el logaritmo, por un lado, como operación y, por otro, como función. Además, se han considerado registros no solo simbólicos, sino también gráficos.

La descripción de las viñetas puede ser útil tanto en la formación de futuros profesores como para mejorar la propia práctica (González y Portugal, 2018; Vargas, 2017). Es esencial la transferencia de los resultados de este tipo de investigaciones sobre la práctica, dado que, la formación y el conocimiento del profesor se nutre tanto de la investigación como de la propia experiencia del docente, de forma que las investigaciones más recientes sobre el conocimiento del profesor se centran en dicha práctica (Llinares, 2013).

El análisis de esta práctica, contrastado con los antecedentes que se presentan en esta investigación ha llevado a los autores a continuar las indagaciones en orden a establecer una propuesta para la formación de profesores y aportar en la deconstrucción del concepto *logaritmo* y la *función logarítmica*, en este caso, a partir de «modelos básicos» enunciados por Weber (2016, 2017) y proponiendo el uso de las publicaciones especializadas en este campo.

6. Referencias

Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktac, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Attorps, I., Björk, K., Radic, M. y Viirman, O. (2013). Teaching inverse functions at tertiary level. En: Ubuz, B., Haser, Ç. y Mariotti, M. A. (eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2524-2533). Middle East Technical University y ERME.

Bayacit, I. y Gray, E. (2004) Understanding inverse functions: The relationship between teaching practice and student learning. En: Honies, M. J. y Fuglestad, A. B. (eds.). *Proceedings of 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 103-110). PME.

Breen, S., Larson, N., O'Shea, A. y Pettersson, K. (2015). Students' concept images of inverse functions. En: Krainer, K. y Vondrová, N. (eds.). *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2228-2234). ERME.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*(3), 247-285.

Brown, C. A. y Reynolds, B. (2007). Delineating four conceptions of function: A case of composition and inverse. En: Lamberg, E. y Wiest, L. R. (eds.). *Proceedings of the 29th Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 190-193). University of Nevada.

Carlson, M. y Oehrtman, M. (2005). *Research Sampler, 9. Key aspects of knowing and learning the concept of function*. Mathematical Association of America.

Carlson, M., Oehrtman, M. y Engelke, N. (2010). The precalculus concept assessment: A tool for assessing students' reasoning abilities and understanding. *Cognition and Understanding, 28*(2), 113-145.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal for Mathematical Behaviour, 15*(2), 167-192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En: Tall, D. (ed.). *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-23). Kluwer Academic.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación Matemática, 8*(3), 24-41.

Dubinsky, E. y McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergrad mathematics education research. En: Holton, D. (ed.). *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Kluwer Academic.

Even, R. (1992) The inverse function: Prospective teachers' use of «undoing». *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 23*(4), 557-562.

García, M., Gavilán, J. M. y Llinares, S. (2012). Perspectiva de la práctica del profesor de matemáticas de secundaria sobre la enseñanza de la derivada. Relaciones entre la práctica y la perspectiva del profesor. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 219-235.

González, M. T. y Portugal, R. (2018) La práctica docente del profesor: la enseñanza de fracciones en un aula de primaria a través de situaciones-problema. *Educatio Siglo XXI, 36*(3), 177-200. https://doi.org/10.6018/j/349961

Hersant, M. y Perrin-Glorian, M. J. (2005). Characterization of an ordinary teaching practice with the help of the Theory of Didactics Situations. *Educational Studies in Mathematics, 59*(1-3), 113-151.

Kimani, P. M. y Masingila, J. O. (2006). Calculus students' perceptions of the relationship among the concepts of function transformation, function composition, and function inverse. En: Alatorre, S., Cortina, J. L., Sáiz, M. y Méndez, A. (eds.). *Proceedings of the Twenty Eighth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology or Mathematics Education* (vol. 2, pp. 68-70). Universidad Pedagógica Nacional.

Llinares, S. (2000). Comprendiendo la práctica del profesor de matemáticas. En: Da Ponte, J. P. y Sarrazina, L. (eds.). *Educaçao Matemática em Portugal, Espanha e Italia Lisboa. Actas da Escola de Verao-1999* (pp. 109-132). SEM-SPCE.

Llinares, S. (2013) Professional noticing: A component of mathematics teacher's professional practice. *Sisyphus, 1*(3), 76-93.

Pettersson, K., Stadler, E. y Tambour, T. (2013). Transformation of students' discourse on the threshold concept of function. En: Ubuz, B., Haser, Ç. y Mariotti, M. A. (eds.). *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2406-2415). Middle East Technical University and ERME.

Philips, N. (2015). Domain, Co-domain and causation: A study of Britney's conception of function. En: Fukawa-Connelly, T., Infante, N., Keene, K. y Zandieh, M. (eds.). *Proceedings of the 18th annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 803-895). SIGMAA on RUME

Vargas, J. (2017). *Análisis de la práctica del docente universitario de precálculo. Estudio de casos en la enseñanza de las funciones exponenciales*. Ediciones Universidad de Salamanca.

Vargas, J., Vargas, N. y González, M. T. (2020). Una modelación de mecanismos de construcción y las propiedades los logaritmos. En: Quintana, M. (ed.). *Diario de Campo. Resultados del desarrollo de métodos y técnicas de investigación*, 10 (pp. 252-276). Sello Editorial Universidad Colegio Mayor de Cundinamarca.

Vidakovic, D. (1996) Learning the concept of inverse function. *Journal for Computers in Mathematics and Science Teaching, 15*(3), 295-318.

Vidakovic, D. (1997). Learning the concept of inverse function in a group versus individual environment. En: Dubinsky, E., Mathews, D. y Reynolds, B. E. (eds.). *Readings in cooperative learning for undergraduate mathematics* (vol. 44, 175-196). The Mathematical Association of America.

Weber, C. (2016). Making logarithms accessible - operational and structural basic models for logarithms. *Journal für Mathematik-Didaktik, 37*(supl. 1), 69-98.

Weber, C. (2017). Graphing logarithmic functions: Multiple interpretations of logarithms as a basis for understanding. En: Douley, T. y Gueudet, G. (eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education CERME10* (pp. 537-544). DCU Institute of Education y ERME.

Wilson, F., Adamson, S., Cox, T. y O'Brian, A. (2011) Inverse functions: What our teachers didn't tell us. *Mathematics Teacher, 104*(7), 500-507.

Sobre los coordinadores

José Antonio Fernández Plaza
Doctor en Didáctica de la Matemática y profesor contratado doctor en el Departamento de Didáctica de la Matemática. Su labor investigadora se centra en pensamiento matemático avanzado, formación inicial del profesorado de Matemáticas, modelización matemática y aprendizaje basado en tecnología. Sus publicaciones en libros y artículos, tanto de investigación como de docencia, son numerosas. Es director de trabajos de investigación y tesis doctorales en Didáctica de la Matemática.

José Luis Lupiáñez Gómez
Profesor titular de Universidad en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, del cual es director. Sus líneas prioritarias de investigación son la educación STEM, la formación de profesores, el talento matemático y el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas.

Antonio Moreno Verdejo
Licenciado en Física y Doctor en Matemáticas. Profesor de matemáticas de Secundaria, profesor ayudante doctor de la Universidad de Granada y director del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria y Bachillerato de la Universidad de Granada. Ha ocupado puestos de dirección en centros de enseñanza secundaria durante varios años. Su labor investigadora se centra en la formación inicial del profesorado y el pensamiento algebrai-

co. Ha sido ponente en numerosos cursos de formación del profesorado. En la actualidad dirige la revista *PNA* de investigación en Educación Matemática y es autor de numerosas publicaciones didácticas y de investigación.

Rafael Ramírez Uclés
Profesor titular del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Tiene una experiencia profesional de más de 17 años como profesor de Secundaria. Ha participado en numerosos cursos, grupos de trabajo y congresos de educación matemática, donde ha presentado comunicaciones y dirigido talleres. Sus principales líneas de investigación son la atención al talento matemático, el pensamiento algebraico y el sentido espacial.

Índice

Investigación en Educación Matemática
Homenaje a los profesores ***Pablo Flores e Isidoro Segovia***

Este libro es un homenaje a los profesores Pablo Flores e Isidoro Segovia, del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Su tesón, su compromiso con la calidad y la innovación en la docencia superior y en la investigación en Educación Matemática, y, sobre todo, su empatía y cordialidad con todos sus compañeros durante su etapa de gestión, han sido un ejemplo para todos nosotros. Más aún, su contribución a la organización y la gestión de la Facultad de Ciencias de la Educación ha sido una constante en sus vidas profesionales. Y a todo esto se le añade una sostenida experiencia en centros educativos, en aulas de Educación Primaria y Secundaria, en los centros de profesorado y en la formación de profesores de matemáticas en ejercicio. Todas esas actividades están representadas de una forma u otra en este libro, cuyos capítulos abordan las líneas de trabajo de estos dos profesores.

Pablo Flores ha desarrollado su actividad universitaria en torno a la formación de profesores, a los componentes de su conocimiento y desarrollo profesional y a sus sistemas de creencias. La de Isidoro Segovia se ha centrado en los procesos de estimación y cálculo, la resolución e invención de problemas, la noción de *currículo* y la formación de profesores.

En este libro participan 44 autores de 15 instituciones educativas de España, Chile, Colombia y Costa Rica. El objetivo de esta obra es dedicarles un merecido reconocimiento por su trabajo desde el cariño, la admiración y el respeto más profundos.

Octaedro

universidad